ORTAÖĞRETİM

MATEMATİK 12

DERS KİTABI

YAZARLAR
Dr. Bayram KEMANCI
Adem VAROL
Sinan ACAR



DEVLET KİTAPLARI
..................., 2024

MİLLİ EĞİTİM BAKANLIĞI YAYINLARI ....: 9501
DERS KİTABI DİZİSİ ....: 1944

HAZIRLAYANLAR

Editör
Dr. Ögr. Üyesi Nebiye KORKMAZ

Dil Uzmanı
Mehmet ATCI

Program Geliştirme Uzmanı
Dr. Halil ÇOKÇALIŞKAN

Ölçme ve Değerlendirme Uzmanı
Dr. Sibel AYDOĞAN

Rehberlik Uzmanı
Canan DURSUN
Melek Aslı HORZUM

Görsel Tasarımcılar
Demir BALIK
Güngör KAPLAN

ISBN 978-975-11-7801-5

Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulunun 02.06.2023 gün ve 29 sayılı kararı ile ders kitabı olarak kabul edilmiştir.



İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

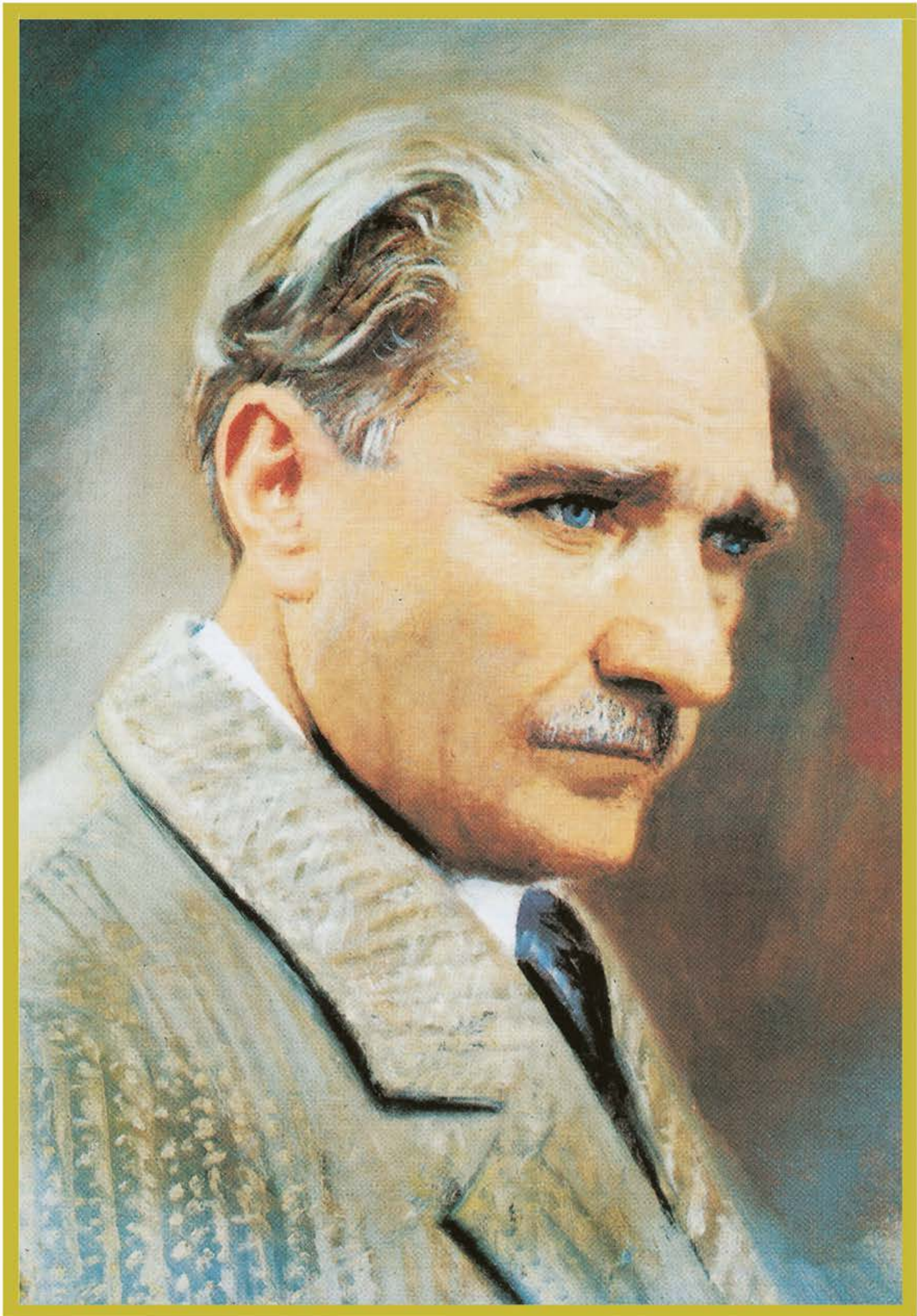
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

KİTABIN TANITIMI

Öğrenme alanı

Alt öğrenme alanı

Konu

Taratıldığında alt öğrenme alanı hakkında tanıtım sunusuna ulaşılabilecek dijital alanı gösteren karekod

SAYILAR VE CEBİR

1. ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

1.1. ÜSTEL FONKSİYON

1.2. LOGARİTMA FONKSİYONU

1.3. ÜSTEL, LOGARİTMİK DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Alt öğrenme alanı sunu karekodu

Bu Bölümde Neler Öğreneceksiniz?

Üstel Fonksiyon
- Üstel fonksiyonu,
- Üstel fonksiyonun özelliklerini,
- Üstel fonksiyonun grafiğini çizmeyi öğreneceksiniz.

Logaritma Fonksiyonu
- Logaritma fonksiyonunu,
- Logaritma fonksiyonu ile üstel fonksiyon arasındaki ilişkiyi,
- Logaritma fonksiyonunun grafiğini,
- 10 tabanında logaritma fonksiyonunu,
- e sayısını,
- Doğal logaritma fonksiyonunu,
- Logaritma fonksiyonunun özelliklerini öğreneceksiniz.

Üstel, Logaritmik Denklemler ve Eşitsizlikler
- Üstel denklemler ve eşitsizlikleri,
- Logaritmik denklemler ve eşitsizlikleri,
- Üstel ve logaritmik fonksiyonlar ile gerçek hayat d umlarını modellemeyi öğreneceksiniz.

Alt öğrenme alanı karekodu

12

Hazırlık Çalışması

Prof. Charles Francis Richter (Çarls Frensis Rihter) tarafından 1930 yıllarında bulunan bir yöntemle depremlerin aletsel büyüklüğü olan magnitude (magnitüd) tanımlanmıştır. Logaritmik bir ölçek olan Richter ölçeği, depremde açığa çıkan enerji hakkında bilgi vermektedir. Richter ölçeğine göre depremin büyüklüğü (M) olmak üzere depremde açığa çıkan erg cinsinden sismik enerji $E = 10^{11,8+1,5 \cdot M}$ bağıntısıyla hesaplanmaktadır.

6 Şubat 2023 tarihinde, saat 04.17'de merkez üssü Kahramanmaraş-Pazarcık olan 7,7 M ve saat 13.24'te merkez üssü Kahramanmaraş-Elbistan olan 7,6 M büyüklüğünde iki deprem meydana geldi. 20 Şubat 2023, saat 20.04'te ise merkez üssü Hatay-Defne olan 6,4 M büyüklüğünde bir deprem oldu. Kahramanmaraş-Pazarcık depreminde açığa çıkan enerji $E = 10^{11,8+1,5 \cdot 7,7} = 10^{23,35}$ ve Kahramanmaraş-Elbistan depreminde açığa çıkan enerji $E = 10^{11,8+1,5 \cdot 7,6} = 10^{23,2}$ olmuştur.

Buna göre

a) Hatay-Defne depreminde açığa çıkan enerjiyi hesaplay bilir misiniz?

b) Kahramanmaraş-Pazarcık depremindeki açığa çıkan en rji Hatay-Defne depreminde açığa çıkan enerjinin kaç katıdır? Hesaplayabilir misiniz?

c) Problem, açığa çıkan enerji 10'un kuvveti olmadığında (neğin $E = 2^{65}$ erg) depremin şiddetinin bulunması için farklı bir yolla çözülebilir mi? Ara ırınız.

13

Taratıldığında görsel, video, soru ve soru çözümlerinin yanı sıra ilave kaynaklara ulaşılabilecek dijital alanı gösteren karekod

Alt öğrenme alanında neler öğrenileceğinin bulunduğu bölüm

Alt öğrenme alanının tanıtıldığı bölüm

Konu başlığı

Konu içinde geçen terimlerin ve kavramların bulunduğu bölüm



KİTABIN TANITIMI

Önceden işlenmiş konuların hatırlatıldığı bölüm

Hatırlatma Artan Fonksiyon

$f: A \to B$ fonksiyon olmak üzere her $x_1, x_2 \in A$ ve $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ ise f artan fonksiyondur.

Konu ile ilgili önemli tanımların verildiği bölüm

Bilgi

$a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan fonksiyona **üstel fonksiyon** denir. Burada a sayısı **üstel fonksiyonun tabanı** ve x **üs** olarak adlandırılır.

Konu aralarında öğrencilerin cevaplandıracağı bölüm

Ders İçi Uygulama 1 Bireysel Çalışma

1. x ve y gerçek sayıları için

$2^x \cdot 5^y = 12$

$2^y \cdot 5^x = \frac{25}{3}$

olduğuna göre $x + y$ değerini bulunuz.

2. x gerçek sayısı için

$2^x = a$

$5^x = b$

olduğuna göre 250^x değerini a ve b türünden bulunuz.

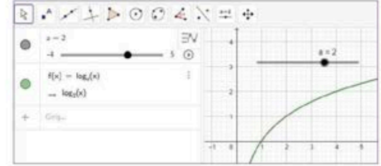
3. x gerçek sayısı için $(0,125)^{3-x} = 16^{x+1}$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

Bilgi ve iletişim teknolojilerinden faydalanılarak konunun daha iyi öğrenilmesini sağlayan bölüm

Ders İçi Uygulama 11 Teknoloji

Dinamik matematik programında a nın aldığı farklı değerlere göre $f(x) = \log_a x$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun grafiğindeki değişimleri incelemek için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. Adım: Sürgü aracı seçildikten sonra grafik alanında boş bir yere tıklanır.
2. Adım: Sürgünün değerleri **a=2, Min: -4, Maks: 5, Artış: 0,1** olarak ayarlanır.
3. Adım: Giriş kısmına **log(a,x)** yazılarak $f(x) = \log_a x$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu oluşturulur.



$f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun grafiği

Yukarıdaki uygulamaya göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) a değeri $[-4, 0]$ nda veya 1 iken grafiğin görünmeme sebebini açıklayınız.

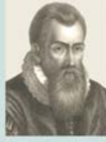
b) Sürgü $(0, 1)$ nda hareket ettirildiğinde oluşan grafiklerin ortak özelliğini açıklayınız.

c) Sürgü $(1, 5]$ nda hareket ettirildiğinde oluşan grafiklerin ortak özelliğini açıklayınız.

KİTABIN TANITIMI

Tarihî kişiliklerin anlatıldığı bölüm

John Napier (1550-1617)



Görsel 1.2
John Napier
(Temsilî)

"Sayıları hesaplama" anlamına gelen "logaritma" terimi Napier (Neypiyr) tarafından icat edilmiştir. İcatlarının "beklenmedik bir olay" olarak meydana geldiği, başkalarının çalışmaları veya önceki düşünce zincirleri ile bağlantısı olmadığı söylenir. Napier, 20 yıl boyunca "genel kurallar" olarak adlandırdığı logaritmik tabloları derlemek için sürekli olarak çaba sarf etmiştir.

(...)

Napier'ın logaritmayı icat etmedeki amacı, büyük sayıları içeren, meşakkatli çaba gerektiren hesaplamalara destek sağlamaktır.

Eserleri: Wonderful Table of Logarthms, Mirifici Logaritmorum Canonis Deseriptio.

The History of Mathematics

Konu ile ilgili alıştırma sorularının bulunduğu bölüm

ALIŞTIRMALAR 1.1

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olmak üzere aşağıdaki fonksiyonlardan hangilerinin üstel fonksiyon olduğunu bulunuz.

a) $f(x) = 1^{x+2}$

b) $f(x) = (-4)^x$

c) $f(x) = (-1)^{x+2}$

ç) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-1}$

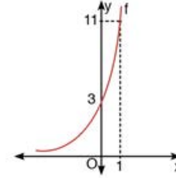
d) $f(x) = (\sqrt[3]{9})^{1-x}$

e) $f(x) = \pi^{\frac{x-2}{3}}$

2. $f:\mathbb{R} \to (-3, \infty)$ ve $f(x) = 2^{x-1} - 3$ olmak üzere $f(2x)$ in $f(x)$ türünden eşitini bulunuz.

6. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \left(\frac{4-a}{a+3}\right)^x$ fonksiyonu üstel ve azalan bir fonksiyon olduğuna göre a nın alabileceği tam sayıların toplamını bulunuz.

7. Aşağıda grafiği verilen f fonksiyonu $f(x) = 3^{mx} + n$ biçiminde tanımlanmıştır.



Buna göre $f(2)$ değerini bulunuz.

Ünite sonunda değerlendirme sorularının bulunduğu bölüm

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1

Aşağıdaki tabloda verilen bilgilere göre boş bırakılan yerleri uygun biçimde doldurunuz.

1.

Fonksiyonun Kuralı	En Geniş Tanım Kümesi	Fonksiyonun Tersinin Kuralı	Fonksiyonun Tersinin Tanım Kümesi
$f(x) = 3 + \log_5(9 - x)$			
$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(3x + m) + 5$	$(-4, \infty)$		
		$f^{-1}(x) = \log_5(x - 2) + 1$	
$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} - 5$			$(-5, \infty)$

2-4. soruları aşağıdaki kutucuklarda verilen fonksiyonların numaralarını kullanarak cevaplayınız.

1. $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = (x-1)^2$
2. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{x+1} - 3$
3. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{1-x}$
4. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 5^x$
5. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3$
6. $f:\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{-1}{x}$
7. $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2x$
8. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{1}{e^{x-1}}$
9. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \left(\frac{\pi}{e}\right)^x$

2. Yukarıda verilen fonksiyonlardan üstel fonksiyon olanları bulunuz.

3. Yukarıda verilen fonksiyonlardan daima artan fonksiyonları bulunuz.

4. Yukarıda verilen fonksiyonlardan hem daima artan hem de üstel fonksiyonları bulunuz.

SEMBOL VE GÖSTERİMLER

$f: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$	f, A dan B ye bir fonksiyon	$\int f(x)dx$	f fonksiyonunun x e göre integrali
$\log x$	10 tabanında logaritma, adi logaritma	$\int_a^b f(x)dx$	f fonksiyonunun $[a, b]$ nda x e göre integrali
$\log_a x$	a tabanında logaritma	$\forall$	her, bütün
$\ln x$	e tabanında logaritma, doğal logaritma	$\exists$	bazı, en az
e	yaklaşık değeri 2,718 olan irrasyonel bir sayı	$\Rightarrow$	ise
e^x	e tabanında üstel fonksiyon	$\Leftrightarrow$	ancak ve ancak
a^x	a tabanında üstel fonksiyon	$\in$	elemanıdır
(a_n)	a_n dizisi	$\notin$	elemanı değildir
$\sum$	toplam simgesi	$\varnothing$, { }	boş küme
S_n	ilk n terim toplamı	$\subseteq$	alt kümesidir
$-\infty$	eksi sonsuz	$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\lim_{x \to a^+} f(x)$	f fonksiyonunun $x = a$ daki sağdan limiti	$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\lim_{x \to a^-} f(x)$	f fonksiyonunun $x = a$ daki soldan limiti	$\mathbb{Z}^-$	Negatif tam sayılar kümesi
$\lim_{x \to a} f(x)$	f fonksiyonunun $x = a$ daki limiti	$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi
$f'(x_0)$	f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi	$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$f''(x_0)$	f fonksiyonunun x_0 noktasındaki ikinci mertebeden türevi	$\mathbb{Q}^+$	Pozitif rasyonel sayılar kümesi
$\frac{dy}{dx}$	y nin x e göre türevi	$\mathbb{Q}^-$	Negatif rasyonel kümesi
$f^{(n)}(x)$	f fonksiyonunun n. mertebeden türevi	$\mathbb{Q}'$	İrrasyonel sayılar kümesi
$\frac{d^n y}{dx^n}$	y nin x e göre n. mertebeden türevi	$\mathbb{R}$	Gerçek sayılar kümesi
$f'(a^+)$	f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki sağdan türevi	$\mathbb{R}^+$	Pozitif gerçek sayılar kümesi
$f'(a^-)$	f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki soldan türevi	$\mathbb{R}^-$	Negatif gerçek sayılar kümesi

SAYILAR VE CEBİR

1. ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

1.1. ÜSTEL FONKSİYON

1.2. LOGARİTMA FONKSİYONU

1.3. ÜSTEL, LOGARİTMİK DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Bu Bölümde Neler Öğreneceksiniz?

Üstel Fonksiyon
- Üstel fonksiyonu,
- Üstel fonksiyonun özelliklerini,
- Üstel fonksiyonun grafiğini çizmeyi öğreneceksiniz.

Logaritma Fonksiyonu
- Logaritma fonksiyonunu,
- Logaritma fonksiyonu ile üstel fonksiyon arasındaki ilişkiyi,
- Logaritma fonksiyonunun grafiğini,
- 10 tabanında logaritma fonksiyonunu,
- e sayısını,
- Doğal logaritma fonksiyonunu,
- Logaritma fonksiyonunun özelliklerini öğreneceksiniz.

Üstel, Logaritmik Denklemler ve Eşitsizlikler
- Üstel denklemler ve eşitsizlikleri,
- Logaritmik denklemler ve eşitsizlikleri,
- Üstel ve logaritmik fonksiyonlar ile gerçek hayat durumlarını modellemeyi öğreneceksiniz.



Alt öğrenme alanı karekodu

Alt öğrenme alanı sunu karekodu



Hazırlık Çalışması

Prof. Charles Francis Richter (Çarls Frensis Rihter) tarafından 1930 yıllarında bulunan bir yöntemle depremlerin aletsel büyüklüğü olan magnitude (magnitüd) tanımlanmıştır. Logaritmik bir ölçek olan Richter ölçeği, depremde açığa çıkan enerji hakkında bilgi vermektedir. Richter ölçeğine göre depremin büyüklüğü (M) olmak üzere depremde açığa çıkan erg cinsinden sismik enerji $E = 10^{11,8+1,5 \cdot M}$ bağıntısıyla hesaplanmaktadır.

6 Şubat 2023 tarihinde, saat 04.17'de merkez üssü Kahramanmaraş-Pazarcık olan 7,7 M ve saat 13.24' te merkez üssü Kahramanmaraş-Elbistan olan 7,6 M büyüklüğünde iki deprem meydana geldi. 20 Şubat 2023, saat 20.04'te ise merkez üssü Hatay-Defne olan 6,4 M büyüklüğünde bir deprem oldu. Kahramanmaraş-Pazarcık depreminde açığa çıkan enerji $E = 10^{11,8+1,5 \cdot 7,7} = 10^{23,35}$ ve Kahramanmaraş-Elbistan depreminde açığa çıkan enerji $E = 10^{11,8+1,5 \cdot 7,6} = 10^{23,2}$ olmuştur.

Buna göre

a) Hatay-Defne depreminde açığa çıkan enerjiyi hesaplayabilir misiniz?

b) Kahramanmaraş-Pazarcık depremindeki açığa çıkan enerji Hatay-Defne depreminde açığa çıkan enerjinin kaç katıdır? Hesaplayabilir misiniz?

c) Problem, açığa çıkan enerji 10'un kuvveti olmadığında (örneğin $E = 2^{65}$ erg) depremin şiddetinin bulunması için farklı bir yolla çözülebilir mi? Araştırınız.

1.1. ÜSTEL FONKSİYON

Terimler ve Kavramlar

- **Üstel fonksiyon**

Üstel fonksiyonlar, birçok bilim dalında ve günlük hayatta karşılaşılan problemlerin modellenmesinde kullanılmaktadır.

Mevcut nüfus eğilimlerini tespit etmek ve bu eğilimlerin devamı durumunda gelecekteki nüfus yapısı hakkında çıkarımlarda bulunmak ülkeler için daha sağlıklı politikalar üretilmesini sağlar. Bu nedenle sosyologlar, nüfus artışının hesaplanmasında üstel fonksiyonlardan yararlanır.

Bakteri popülasyonunu araştıran biyologlar, bir çözeltinin pH değerini araştıran kimyagerler, ses düzeyi birimi olan desibel (dB) şiddetini ölçmek isteyen fizikçiler, depremin şiddetini inceleyen jeologlar, antik eserlerin yaşını inceleyen arkeologlar da üstel fonksiyonları kullanır.
Ayrıca finans ve bankacılık işlemlerinde de üstel fonksiyonlardan yararlanılır.

Nüfus Artışı



İnci Öğretmen, kemirgenlerin sayısının artış hızının üstel fonksiyonlar ile ilişkisini açıklamak için öğrencilere aşağıdaki bilgileri vermiştir:

Laboratuvar ortamında oluşturulmuş uygun yaşam koşullarında bir kafese dişi ve erkek 10 tane kemirgen konduğunda kemirgenlerin toplam sayısının her ay önceki aya göre 3 kat arttığı görülmüştür.

Tablo 1.1 Kemirgen sayısı

	Başlangıç	1. Ay	2. Ay	3. Ay	4. Ay	5. Ay	...	x. Ay
Toplam Kemirgen Sayısı	$10 \cdot 3^0$	$10 \cdot 3^1$	$10 \cdot 3^2$	$10 \cdot 3^3$			...	?

Yukarıdaki tabloda (Tablo 1.1) her ayın sonundaki toplam kemirgen sayısı verilmiştir. x ay sonra toplam kemirgen sayısının $10 \cdot 3^x$ olduğu görülmüştür.

Aşağıdaki soruları yukarıda verilen bilgilere göre cevaplayınız.

a) 4 ve 5. ay sonundaki kemirgen sayısını tabloya yazınız.

b) x ay sonraki kemirgen sayısını ifade eden f fonksiyonunun kuralını bulunuz.

Hatırlatma — Üslü İfadelerin Özellikleri

$b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; b ve n her ikisi aynı anda sıfır olmamak üzere b^n ile gösterilen ifadelere **üslü ifade** denir. " b üssü n" biçiminde okunur ve **b ye taban, n ye üs** denir.

$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdots b}_{n \text{ tane}}$ olur.

Özellik $(x, y, a, b \in \mathbb{R})$	**Örnekler**
$x \neq 0$ olmak üzere $x^0 = 1$	$2^0 = 1,\ \left(-\frac{3}{4}\right)^0 = 1,\ (\sqrt{3})^0 = 1$
$x^1 = x$	$4^1 = 4,\ \left(-\frac{6}{7}\right)^1 = -\frac{6}{7},\ (\sqrt{5})^1 = \sqrt{5}$
$x \neq 0$ olmak üzere $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$, $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^9 = \left(-\frac{3}{2}\right)^{-4+9} = \left(-\frac{3}{2}\right)^5$
$x \neq 0$ olmak üzere $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$	$\frac{7^9}{7^4} = 7^{9-4} = 7^5,\ \frac{(-2)^{12}}{(-2)^9} = (-2)^{12-9} = (-2)^3$
$x \neq 0$ ve $y \neq 0$ olmak üzere $(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a$	$15^6 = (3 \cdot 5)^6 = 3^6 \cdot 5^6,\ (\sqrt{21})^5 = (\sqrt{3})^5 \cdot (\sqrt{7})^5$
$y \neq 0$ olmak üzere $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^7 = \frac{2^7}{5^7},\ (0,3)^8 = \left(\frac{3}{10}\right)^8 = \frac{3^8}{10^8}$
$x \neq 0$ olmak üzere $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$	$\frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6},\ \left(\frac{5}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{5^4}{3^4}} = \frac{3^4}{5^4}$
$x \neq 0$ olmak üzere $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$	$81^8 = (3^4)^8 = 3^{4 \cdot 8} = 3^{32},\ \left(\frac{1}{125}\right)^6 = (5^{-3})^6 = 5^{-18}$
$x \in \mathbb{R}^+$ ve $x \neq 1$ olmak üzere $x^a = x^b$ ise $a = b$ olur.	$x^3 = \frac{1}{343} \Rightarrow x^3 = \frac{1}{7^3} \Rightarrow x^3 = \left(\frac{1}{7}\right)^3 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$

1. ÖRNEK

$2^a = x$, $3^a = y$ ve $5^a = z$ olduğuna göre 360^a nın x, y ve z türünden değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$360^a = 8^a \cdot 9^a \cdot 5^a = (2^3)^a \cdot (3^2)^a \cdot 5^a = (2^a)^3 \cdot (3^a)^2 \cdot 5^a = x^3 \cdot y^2 \cdot z$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 1

Bireysel Çalışma

1. x ve y gerçek sayıları için

$2^x \cdot 5^y = 12$

$2^y \cdot 5^x = \frac{25}{3}$

olduğuna göre $x + y$ değerini bulunuz.

2. x gerçek sayısı için

$2^x = a$

$5^x = b$

olduğuna göre 250^x değerini a ve b türünden bulunuz.

3. x gerçek sayısı için $(0,125)^{3-x} = 16^{x+1}$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

Bilgi

$a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan fonksiyona **üstel fonksiyon** denir. Burada a sayısı **üstel fonksiyonun tabanı** ve x **üs** olarak adlandırılır.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun üstel fonksiyon olabilmesi için a^x ifadesinde a nın 1 den farklı pozitif gerçek sayı olması gerekir. Taban 1 olursa $f(x) = 1^x = 1$ biçiminde sabit fonksiyon olur. O hâlde üstel fonksiyonun tabanı 1 olamaz.

a^x ifadesinde a negatif olursa örneğin $a = -3$ için $f(x) = (-3)^x$ olduğundan $f\left(\frac{1}{2}\right) = (-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3}$ olur. Buradan $\sqrt{-3}$ ün gerçek sayı olmadığı görülür. Bu durumda üstel fonksiyonların tabanı negatif olamaz.

2. ÖRNEK

Aşağıda kuralları verilen gerçek sayılarda tanımlı fonksiyonların hangilerinin üstel fonksiyon olduğunu bulunuz.

a) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ **c)** $h(x) = 3^{-x}$ **d)** $m(x) = \pi^{-x}$

b) $g(x) = 1^x$ **ç)** $k(x) = \left(-\frac{4}{3}\right)^x$ **e)** $r(x) = x^3 + 7^x$

ÇÖZÜM

a) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ tabanı $\frac{2}{5}$ olan üstel bir fonksiyondur.

b) $g(x) = 1^x$ tabanı 1 olduğundan üstel fonksiyon değildir.

c) $h(x) = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ tabanı $\frac{1}{3}$ olan üstel bir fonksiyondur.

ç) $k(x) = \left(-\frac{4}{3}\right)^x$ tabanı negatif olduğundan üstel fonksiyon değildir.

d) $m(x) = \pi^{-x} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x$ tabanı $\frac{1}{\pi}$ olan üstel bir fonksiyondur.

e) $r(x) = x^3 + 7^x$ fonksiyonunda x^3 ifadesinin tabanı birden farklı bir gerçek sayı olmadığından r fonksiyonu üstel fonksiyon değildir.

3. ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = (10 - 3m)^x$ kuralı ile verilen f fonksiyonu üstel fonksiyon olduğuna göre m nin alacağı en büyük tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun üstel fonksiyon olması için $10 - 3m > 0$ ve $10 - 3m \neq 1$ olmalıdır.

$10 - 3m > 0 \Rightarrow 3m < 10 \Rightarrow m < \frac{10}{3}$ olur.

$10 - 3m \neq 1 \Rightarrow 3m \neq 9 \Rightarrow m \neq 3$ olarak bulunur.

Buradan m nin alacağı bu şartlara uygun en büyük tam sayı değeri 2 olur.

4. ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 8^{x+1} - 2$ olduğuna göre $f(-1)$, $f\left(\frac{2}{3}\right)$, $f(0)$ ve $f(-2)$ değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(-1) = 8^{-1+1} - 2 = 8^0 - 2 = 1 - 2 = -1$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 8^{\frac{2}{3}+1} - 2 = 8^{\frac{5}{3}} - 2 = (2^{\cancel{3}})^{\frac{5}{\cancel{3}}} - 2 = 32 - 2 = 30$

$f(0) = 8^{0+1} - 2 = 8^1 - 2 = 6$

$f(-2) = 8^{-2+1} - 2 = 8^{-1} - 2 = \frac{1}{8} - 2 = -\frac{15}{8}$ bulunur.

5. ÖRNEK

f üstel fonksiyonu $f(x) = 2^{x-1}$ şeklinde tanımlandığına göre $f(2x)$ in $f(x+1)$ türünden eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x+1) = 2^{x+1-1} = 2^x$ olur.

$f(2x) = 2^{2x-1}$

$= 2^{2x} \cdot 2^{-1}$

$= \dfrac{(2^x)^2}{2} = \dfrac{f^2(x+1)}{2}$ bulunur.

2^x yerine $f(x+1)$ yazılırsa

6. ÖRNEK

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ve $f(x) = a^x$ olmak üzere f fonksiyonunun aşağıda verilen eşitlikleri sağladığını gösteriniz.

a) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

b) $f(x-y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$

c) $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$

ç) $f(2x-3y) = \dfrac{f^2(x)}{f^3(y)}$

ÇÖZÜM

f fonksiyonu üstel fonksiyon olduğundan a, 1 den farklı pozitif bir gerçek sayıdır ve $f(x) = a^x$ ile gösterilir.

a) $f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$ olur.

b) $f(x-y) = a^{x-y} = a^x \cdot a^{-y} = \dfrac{a^x}{a^y} = \dfrac{f(x)}{f(y)}$ olur.

c) $f(-x) = a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} = \dfrac{1}{f(x)}$ olur.

ç) $f(2x-3y) = a^{2x-3y} = \dfrac{a^{2x}}{a^{3y}} = \dfrac{(a^x)^2}{(a^y)^3} = \dfrac{f^2(x)}{f^3(y)}$ olur.

7. ÖRNEK

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ve $f(x) = a^x$ olmak üzere $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ biçiminde tanımlanan f üstel fonksiyonu için $f(2) = 8$ ise $f(6)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(2) = a^2 = 8$ olduğundan $a^2 = 2^3 \Rightarrow a^{\frac{2}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow a = 2^{\frac{3}{2}}$ bulunur.

$f(6) = a^6$

$= (2^{\frac{3}{2}})^{6} = (2^3)^3 = 2^9$ olur.

Eşitliğin her iki tarafının $\frac{1}{2}$. kuvveti alınırsa

8. ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+,\ f(x) = \left(\frac{6-a}{a+2}\right)^x$ fonksiyonu üstel bir fonksiyon olduğuna göre a nın alabileceği tam sayıların toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = \left(\frac{6-a}{a+2}\right)^x$ fonksiyonu üstel bir fonksiyon olduğuna göre

$\frac{6-a}{a+2} > 0$ ve $\frac{6-a}{a+2} \neq 1$ olmalıdır.

Eşitsizliğin işaret tablosu

		-2		6	
$\frac{6-a}{a+2} > 0$	$-$	○	$+$	○	$-$
			Çözüm		

biçiminde bulunur ve

$6 - a \neq a + 2$

$4 \neq 2a \Rightarrow a \neq 2$ olur.

a tam sayı değerleri $-1, 0, 1, 3, 4, 5$ bulunur. Bu durumda a nın alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı 12 olur.

9. ÖRNEK

Begüm arkadaşına hediye almayı planlamıştır. Bu nedenle yeni bir kumbara alan Begüm kumbarasına 10 gün boyunca her gün bir önceki gün attığı paranın iki katı kadar para atmaya karar vermiştir.

a) Begüm kumbaraya ilk gün 75 kuruş attığına göre Begüm'ün kumbarasında n. günde biriken para miktarını veren f fonksiyonunun kuralını oluşturunuz.

b) Begüm ilk kez pazartesi günü kumbarasına 75 kuruş atmıştır. Yedi günün sonunda kumbarada biriken para ile arkadaşına hediye almayı planlayan Begüm'ün kaç liralık bir hediye alabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Begüm'ün boş olan kumbaraya attığı paraları gösteren tablo aşağıda verilmiştir.

Gün	1. gün	2. gün	3. gün	4. gün	...	n. gün
Kuruş	$75 \cdot 2^0$	$75 \cdot 2^1$	$75 \cdot 2^2$	$75 \cdot 2^3$	...	$75 \cdot 2^{n-1}$

Buradan f fonksiyonunun kuralı, n gün sayısı olmak üzere $f(n) = 75 \cdot 2^{n-1}$ olarak bulunur.

b) Begüm, para biriktirmeye pazartesi günü başlayıp pazar günü de kumbarasına para atarsa en fazla parayı biriktirmiş olur. Bu durumda Begüm, kumbarasına 7 gün boyunca para atarak en fazla

$$75 \cdot 2^0 + 75 \cdot 2^1 + 75 \cdot 2^2 + \ldots + 75 \cdot 2^6 = 75 \cdot (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^6)$$
$$= 75 \cdot (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64)$$
$$= 75 \cdot 127$$
$$= 9\,525 \text{ kuruş} = 95{,}25$$ liralık hediye alabilir.

Ders İçi Uygulama 2

Bireysel Çalışma

1. n bir doğal sayı olmak üzere

$f(x) = 3^{x+2}$

$f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n-1) = 27^{n+4}$

ise n değerini bulunuz.

2. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$, $f(x) = \left(\frac{a+2}{7-a}\right)^{x}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon üstel bir fonksiyon olduğuna göre a nın değer aralığını bulunuz.

3. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$, $f(x) = 3 \cdot 2^{x}$ olduğuna göre $f(3x)$ in $f(x)$ türünden değerini bulunuz.

4. Bir hastanın vücudundaki ilaç 3200 mg etkin madde içermektedir. Bu ilaçtaki etkin madde hastanın vücudunda saat başı $\frac{1}{2}$ oranında azalıyor. Hastanın vücudunda 100 mg etkin madde kalması için kaç saat geçmesi gerektiğini bulunuz.

Ders İçi Uygulama 3 — Teknoloji

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna göre $f(\sqrt{3})$, $f\left(\frac{5}{2}\right)$ ve $f(\pi)$ nin yaklaşık değerleri bilimsel hesap makinesiyle aşağıdaki gibi hesaplanır.

a) $f(\sqrt{3})$'ün yaklaşık değerini hesaplamak için bilimsel hesap makinesinde sırasıyla

2	x^y	(	3	$\sqrt[2]{x}$	)	=

tuşlarına basıldığında $f(\sqrt{3}) \cong 3,32$ bulunur.

b) $f\left(\frac{5}{2}\right)$ nin yaklaşık değerini hesaplamak için bilimsel hesap makinesinde sırasıyla

2	x^y	(	5	÷	2	)	=

tuşlarına basıldığında $f\left(\frac{5}{2}\right) \cong 5,66$ bulunur.

c) $f(\pi)$ nin değerini hesaplamak için bilimsel hesap makinesinde sırasıyla

2	x^y	(	π	)	=

tuşlarına basıldığında $f(\pi) \cong 8,82$ bulunur.

Aşağıdaki tabloda verilen üstel fonksiyonların belirtilen noktalardaki yaklaşık değerlerini bilimsel hesap makinesiyle hesaplayıp uygun boşluklara yazınız.

x / Fonksiyon	$-1,5$	0	$\frac{2}{5}$	$\sqrt{5}$
$f(x) = 3^x$	0,19			
$g(x) = 2^{\pi x}$				130,22
$h(x) = 5^{-x}$			0,53	

Üstel Fonksiyonun Grafiği

10. ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Fonksiyonun bire bir, örten, artan, azalan, pozitif, negatif değerli olma durumlarını inceleyiniz.

ÇÖZÜM

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$ fonksiyonunda x e değerler verilerek aşağıdaki biçimde fonksiyonun değişim tablosu oluşturulur.

⋮

$x = -2 \Rightarrow f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 2^0 = 1$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 2^1 = 2$

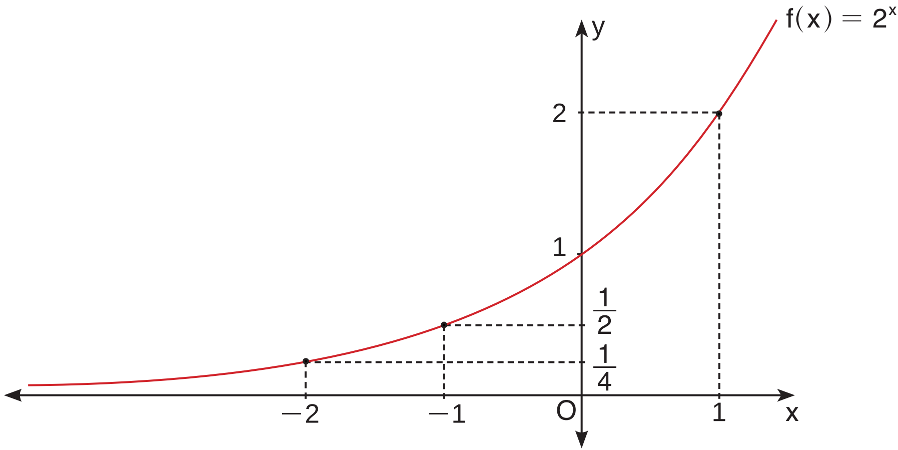
$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2^2 = 4$

⋮

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f(x) = 2^x$	...		$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{1}{2}$	↗	1	↗	2	↗	4	↗	...

Yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi x değerleri arttıkça fonksiyonun aldığı değerler de artmaktadır.

Bulunan değerler analitik düzlemde gösterilirse aşağıdaki grafik elde edilir.



$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$ fonksiyonunun bire bir ve örtenliğinin incelenmesi

Hatırlatma Bire Bir ve Örten Fonksiyon

$f:A \to B$ fonksiyon olmak üzere her $x_1, x_2 \in A$ ve $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ ise f bire bir fonksiyondur. Başka bir ifade ile her $x_1, x_2 \in A$ ve $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise f bire bir fonksiyondur.

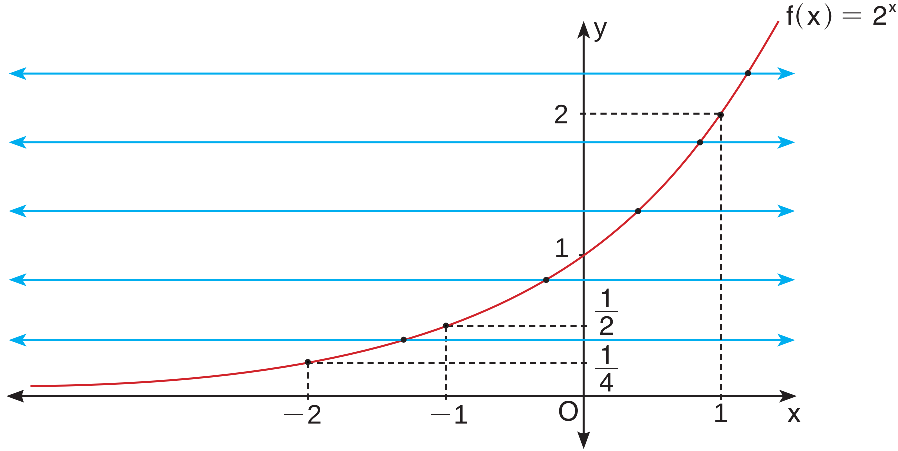
$f:A \to B$ fonksiyon olmak üzere görüntü kümesi değer kümesine eşit $(f(A) = B)$ ise f örten fonksiyondur. Her $y \in B$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in A$ varsa f örten fonksiyondur.

I. Yol

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$ için $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2^{x_1} = 2^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ olduğundan f bire bir fonksiyondur.

Her $y \in \mathbb{R}^+$ için $2^x = y$ olacak şekilde en az bir $x \in \mathbb{R}$ bulunabileceği için f örten fonksiyondur.

II. Yol



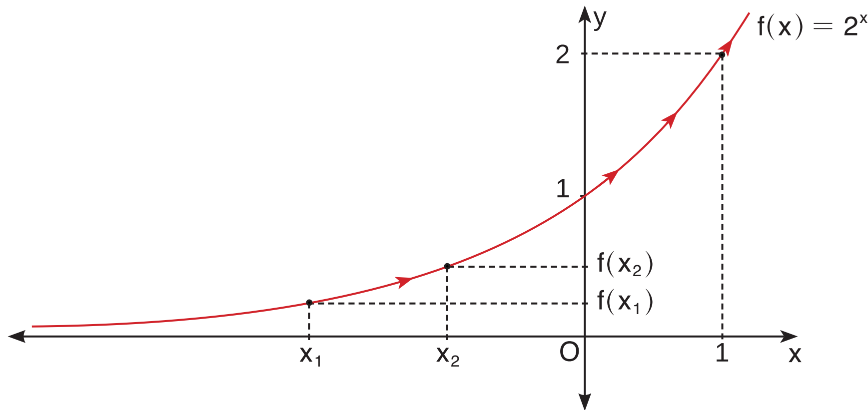
Yatay doğru testi ile görüntü kümesinden x eksenine paralel çizilen her yatay doğru, fonksiyonun grafiğini sadece bir noktada kestiği için f bire bir fonksiyondur.

Görüntü kümesinden x eksenine paralel çizilen her yatay doğru, fonksiyonun grafiğini kestiği için f örten fonksiyondur.

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$ fonksiyonunun artan veya azalan olma durumunun incelemesi

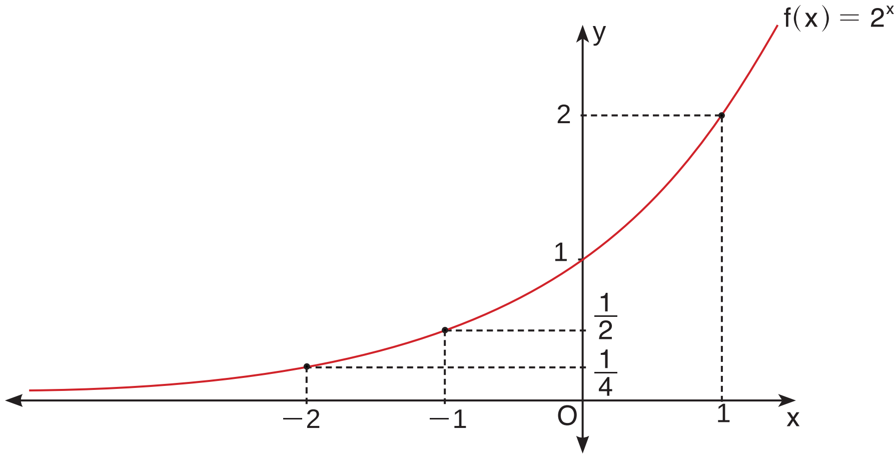
Hatırlatma Artan Fonksiyon

$f: A \to B$ fonksiyon olmak üzere her $x_1, x_2 \in A$ ve $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ ise f artan fonksiyondur.



$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde her $x_1 < x_2 \in \mathbb{R}$ için $2^{x_1} < 2^{x_2}$ olduğu görülür. Buradan f artan bir fonksiyondur.

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$ fonksiyonunun pozitif veya negatif olma durumunun incelenmesi

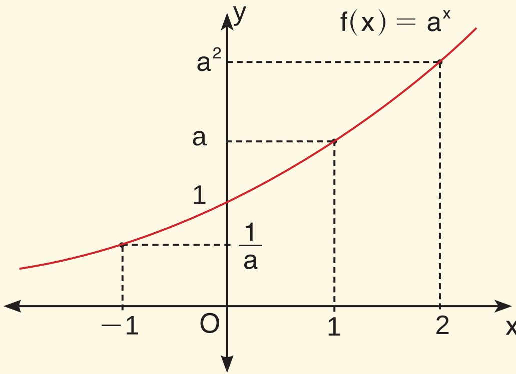


$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$ fonksiyonunun görüntü kümesi, $\mathbb{R}^+$ olduğu ve f fonksiyonu x eksenini kesmediği için pozitif değerlidir.

Bilgi

$a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ için $f(x) = a^x$ in değişim tablosu ve grafiği aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$	...		-1		0		1		2		$+\infty$
$f(x) = a^x$	...		↗	$\frac{1}{a}$	↗	1	↗	a	↗	a^2	↗	$+\infty$



$a > 1$ ve $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonu

- Bire bir ve örtendir.
- Artandır.
- Pozitif değerlidir.

11. ÖRNEK

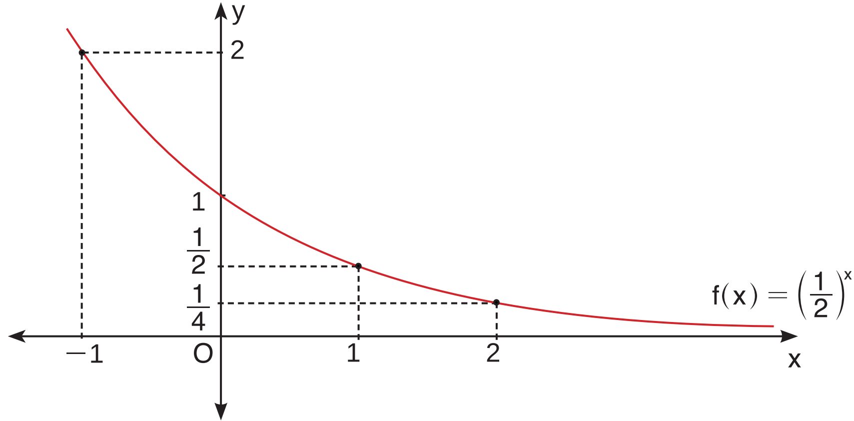
$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Fonksiyonun bire bir, örten, artan, azalan, pozitif, negatif değerli olma durumunu inceleyiniz.

ÇÖZÜM

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun değişim tablosu yandaki gibidir.

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	...	↘	4	↘	2	↘	1	↘	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{1}{4}$	↘	...

Tabloda görüldüğü gibi x değerleri arttıkça fonksiyonun aldığı değerler azalmaktadır. Bulunan değerler analitik düzlemde gösterilirse aşağıdaki grafik elde edilir.



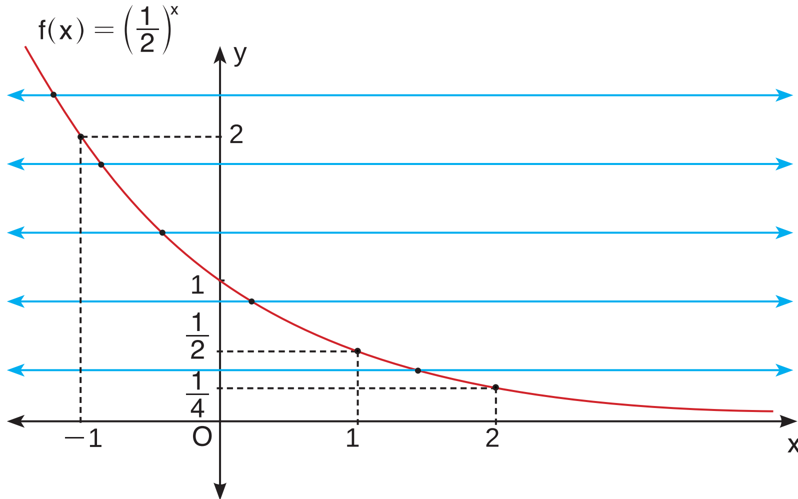
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+,\ f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun bire bir ve örtenliğinin incelenmesi

I. Yol

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+,\ f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ için $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$ olduğundan f bire bir fonksiyondur.

Her $y\in\mathbb{R}^+$ için $\left(\frac{1}{2}\right)^x=y$ olacak şekilde en az bir $x\in\mathbb{R}$ bulunabileceği için f örten fonksiyondur.

II. Yol



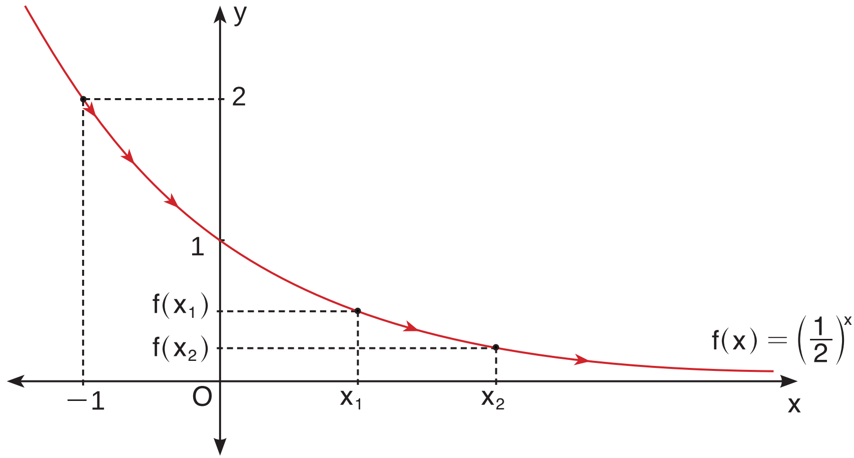
Yatay doğru testi ile görüntü kümesinden x eksenine paralel çizilen her yatay doğru, fonksiyonun grafiğini sadece bir noktada kestiği için f fonksiyonu bire birdir.

Görüntü kümesinden çizilen her yatay doğru, grafiği kestiği için f fonksiyonu örtendir.

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+},\ f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ fonksiyonunun artan veya azalan olma durumunun incelemesi

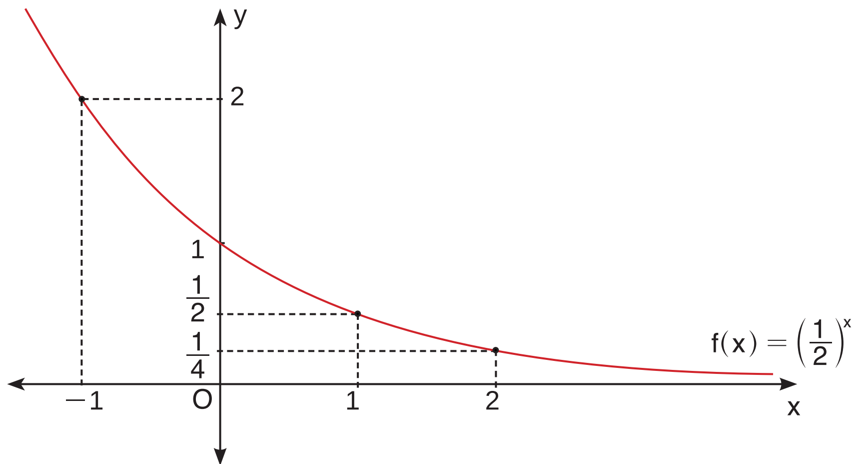
Hatırlatma Azalan Fonksiyon

$f: A \rightarrow B$ fonksiyon olmak üzere her $x_1,\ x_2 \in A$ ve $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ ise f azalan fonksiyondur.



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+},\ f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde her $x_1 < x_2 \in \mathbb{R}$ için $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$ olduğu görülür. Buradan f azalan bir fonksiyondur.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+},\ f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ fonksiyonunun pozitif veya negatif olma durumunun incelenmesi

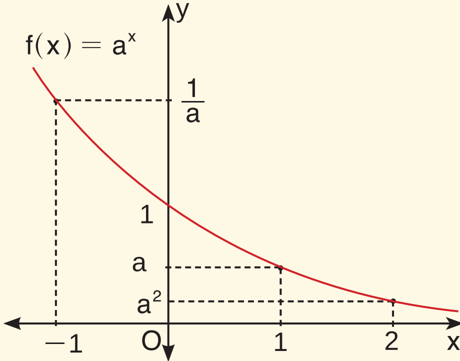


$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+},\ f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ fonksiyonu, görüntü kümesi $\mathbb{R}^{+}$ olduğu ve f fonksiyonunun grafiği x eksenini kesmediği için pozitif değerlidir.

Bilgi

$a \in \mathbb{R}^+$, $0 < a < 1$ için $f(x) = a^x$ in değişim tablosu ve grafiği aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$	...		-1		0		1		2		$+\infty$
$f(x) = a^x$	$+\infty$	...	↘	$\frac{1}{a}$	↘	1	↘	a	↘	a^2	↘	...



$0 < a < 1$ için $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonu

- Bire bir ve örtendir.
- Azalandır.
- Pozitif değerlidir.

12. ÖRNEK

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ve $f(x) = a^x$ olmak üzere f fonksiyonu $f(x) = (7 - 3n)^x$ biçiminde tanımlanıyor. f fonksiyonunun artan bir fonksiyon olması için n nin en geniş değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğundan $1 < 7 - 3n$ olmalıdır.
Buradan $3n < 7 - 1 \Rightarrow 3n < 6 \Rightarrow n < 2$ olur.
Bu durumda n nin en geniş değer aralığı $(-\infty, 2)$ biçiminde bulunur.

Ders İçi Uygulama 4 — Bireysel Çalışma

Aşağıda $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tanımlı üstel fonksiyonların artanlık veya azalanlık durumlarını inceleyiniz.

a) $f(x) = 5^x$ **b)** $g(x) = 3^{5-x}$ **c)** $h(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2}$ **ç)** $k(x) = (\sqrt{2})^{4x-5}$

13. ÖRNEK

$f(x) = \left(\frac{k-1}{3}\right)^x$ şeklinde tanımlanan f üstel fonksiyonunun azalan bir fonksiyon olması için k nin en geniş değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonu azalan bir fonksiyon olduğundan $0 < \frac{k-1}{3} < 1$ olmalıdır. Buradan
$0 < k - 1 < 3 \Rightarrow 1 < k < 4$ olur. Bu durumda k nin en geniş değer aralığı $(1, 4)$ biçiminde bulunur.

Ders İçi Uygulama 5 — Bireysel Çalışma

$f(x) = \left(\frac{2a-4}{5}\right)^x$ fonksiyonu azalan ve $g(x) = \left(\frac{b-1}{4}\right)^x$ fonksiyonu artan fonksiyon ise $a + b$ ifadesinin en küçük tam sayı değerini bulunuz.

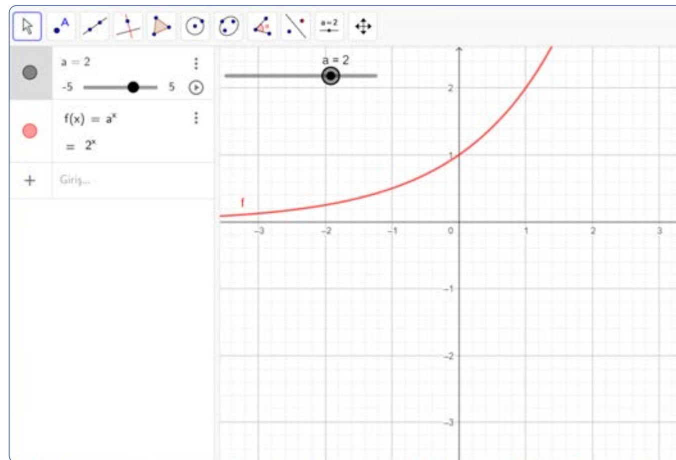
Ders İçi Uygulama 6 — Teknoloji

Dinamik matematik programında a nın aldığı farklı değerlere göre $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun grafiğindeki değişimleri incelemek için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. Adım: Sürgü aracı seçildikten sonra grafik alanında boş bir yere tıklanır.

2. Adım: Sürgünün değerleri **a=2, Min: -4, Maks: 5, Artış: 0,1** olarak ayarlanır.

3. Adım: Giriş kısmına $\mathbf{a^x}$ yazılarak $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu oluşturulur.



$f(x) = 2^x$ fonksiyonun grafiği

Yukarıdaki uygulamaya göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

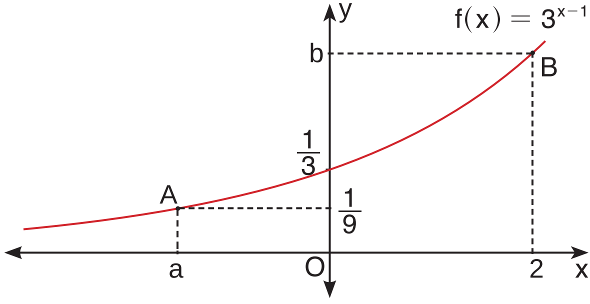
a) a değeri $[-4, 0]$ nda olacak şekilde sürgü hareket ettirildiğinde grafiğin görünmeme sebebini açıklayınız.

b) a değeri 1 olacak şekilde sürgünün hareket ettirilmesiyle oluşan fonksiyon ile daha önce karşılaşıp karşılaşmadığınızı belirterek bu fonksiyonun türünü belirtiniz.

c) Sürgü $(0, 1)$ nda hareket ettirildiğinde oluşan grafiklerin ortak özelliğini açıklayınız.

ç) Sürgü $(1, 5]$ nda hareket ettirildiğinde oluşan grafiklerin ortak özelliğini açıklayınız.

14. ÖRNEK



$f(x) = 3^{x-1}$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun grafiği A ve B noktalarından geçtiğine göre $a + b$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$A\left(a, \frac{1}{9}\right)$ ve $B(2, b)$ noktaları f fonksiyonunun grafiği üzerindedir.

$f(a) = 3^{a-1} = \frac{1}{9} \Rightarrow 3^{a-1} = 3^{-2} \Rightarrow a - 1 = -2 \Rightarrow a = -1$ ve

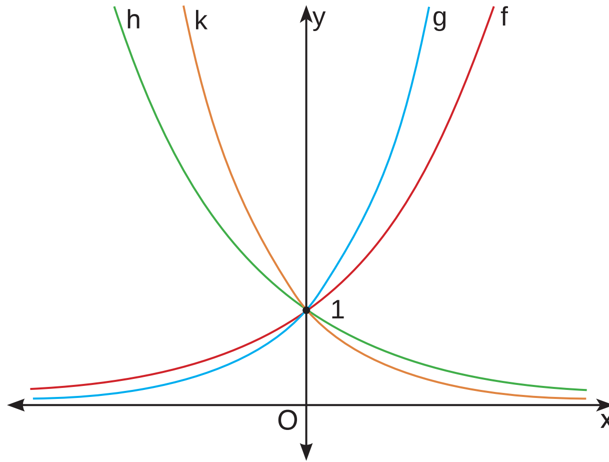
$f(2) = 3^{2-1} = b \Rightarrow 3^{1} = b$ olur.

O hâlde $a + b = -1 + 3 = 2$ bulunur.

Bilgi

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$, $f(x) = a^{x}$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu $a > 1$ iken artan bir fonksiyondur ve a değeri büyüdükçe grafiğin kolu y eksenine yaklaşır; $0 < a < 1$ iken azalan bir fonksiyondur ve a değeri büyüdükçe grafiğin kolu y ekseninden uzaklaşır.

15. ÖRNEK



Analitik düzlemde
$f(x) = a^{x}$, $g(x) = b^{x}$, $h(x) = c^{x}$, $k(x) = d^{x}$
biçiminde tanımlanan f, g, h ve k fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre a, b, c ve d sayılarının doğru sıralanışını bulunuz.

ÇÖZÜM

g ile f fonksiyonları artan ve $g(x) = b^{x}$ in grafiği $f(x) = a^{x}$ in grafiğine göre y eksenine daha yakın olduğu için $1 < a < b$ dir.

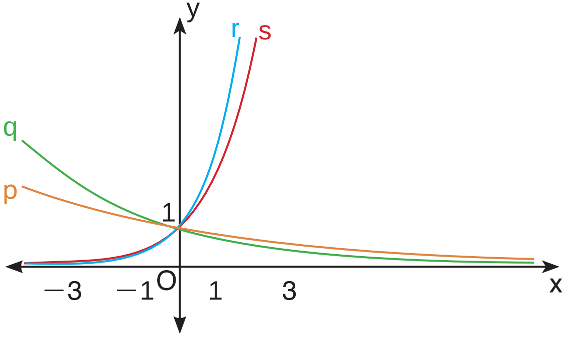
h ile k fonksiyonları azalan ve $k(x) = d^{x}$ in grafiği $h(x) = c^{x}$ in grafiğine göre y eksenine daha yakın olduğu için $0 < d < c < 1$ dir.

Dolayısıyla a, b, c ve d sayılarının doğru sıralanışı $d < c < a < b$ bulunur.

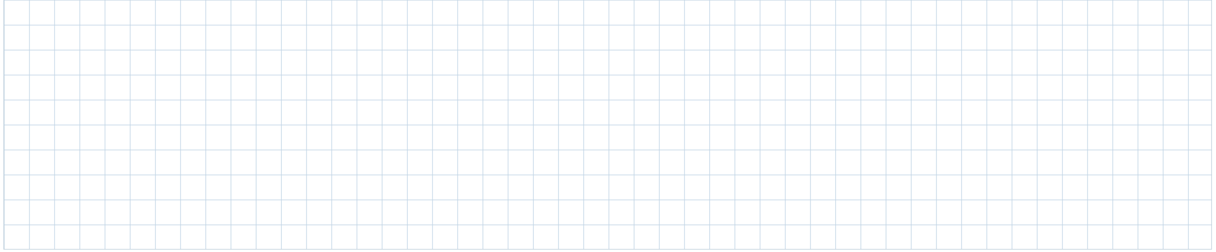
Ders İçi Uygulama 7

Bireysel Çalışma

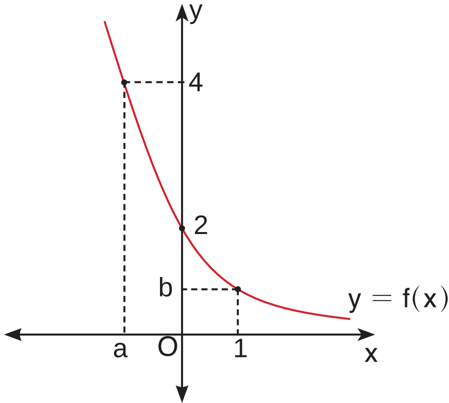
1.



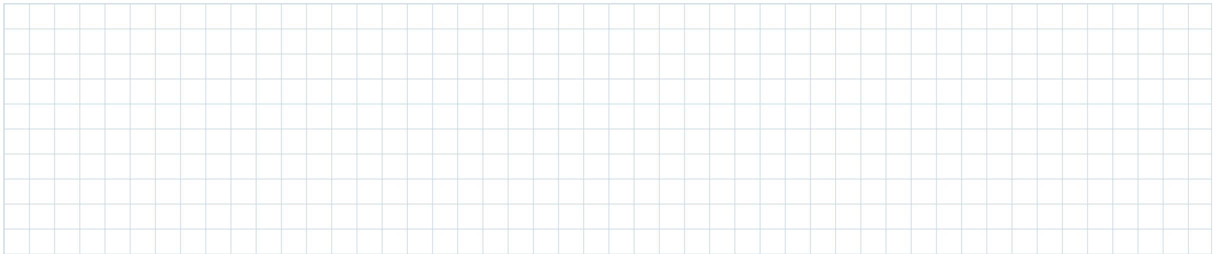
Yukarıdaki grafikte $f(x) = 3^x$, $g(x) = \left(\frac{7}{3}\right)^x$, $h(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ ve $k(x) = \left(\frac{5}{6}\right)^x$ şeklindeki f, g, h ve k fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Grafikler ile fonksiyonları eşleştiriniz.



2.



Yukarıdaki $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^{1-x}$ kuralı ile verilen f fonksiyonun grafiğine göre a + b değerini bulunuz.



ALIŞTIRMALAR 1.1

1. $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ **olmak üzere aşağıdaki fonksiyonlardan hangilerinin üstel fonksiyon olduğunu bulunuz.**

a) $f(x) = 1^{x+2}$ **ç)** $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-1}$

b) $f(x) = (-4)^x$ **d)** $f(x) = (\sqrt[3]{9})^{1-x}$

c) $f(x) = (-1)^{x+2}$ **e)** $f(x) = \pi^{\frac{x-2}{3}}$

2. $f:\mathbb{R} \longrightarrow (-3, \infty)$ **ve** $f(x) = 2^{x-1} - 3$ **olmak üzere** $f(2x)$ **in** $f(x)$ **türünden eşitini bulunuz.**

3. $f:\mathbb{R} \longrightarrow (5, \infty)$ **olmak üzere** $f(x) = 3^{x+1} + 5$ **şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun, x in hangi tam sayı değerleri için** $f(x)$ in $(7, 86]$ **nda olduğunu bulunuz.**

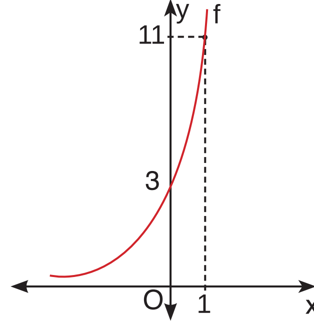
4. Bir A4 kâğıdının kalınlığı 0,05 milimetredir. Ortadan ikiye katlandığında kalınlık 0,1 milimetre olacaktır.

Art arda 8 kere, her defasında ortadan ikiye katlandığında kalınlığın kaç mm olacağını bulunuz.

5. $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ f(x) = \left(\frac{a^2-4}{a+26}\right)^x$ **fonksiyonu üstel ve artan bir fonksiyon olduğuna göre a nın değer aralığını bulunuz.**

6. $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ f(x) = \left(\frac{4-a}{a+3}\right)^x$ **fonksiyonu üstel ve azalan bir fonksiyon olduğuna göre a nın alabileceği tam sayıların toplamını bulunuz.**

7. Aşağıda grafiği verilen f fonksiyonu $f(x) = 3^{mx} + n$ biçiminde tanımlanmıştır.



Buna göre $f(2)$ **değerini bulunuz.**

8. Hasan öğretmen maaş aldığı bankadan bireysel emeklilik fonu açtırmıştır.

- Hasan öğretmenin maaşından her ay 200 TL bireysel emeklilik fonuna kesinti yapılmaktadır.
- Bireysel emeklilik fonuna yapılan aylık kesinti miktarı her aralık ayı sonunda bir önceki yıla göre %20 artmaktadır.
- İlk kesinti 2010 yılı Ocak ayında yapılmıştır.

Yukarıda verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) 2010 yılından başlayarak her yıl için Hasan öğretmenin aylık ödeme miktarını veren üstel fonksiyonu bulunuz.

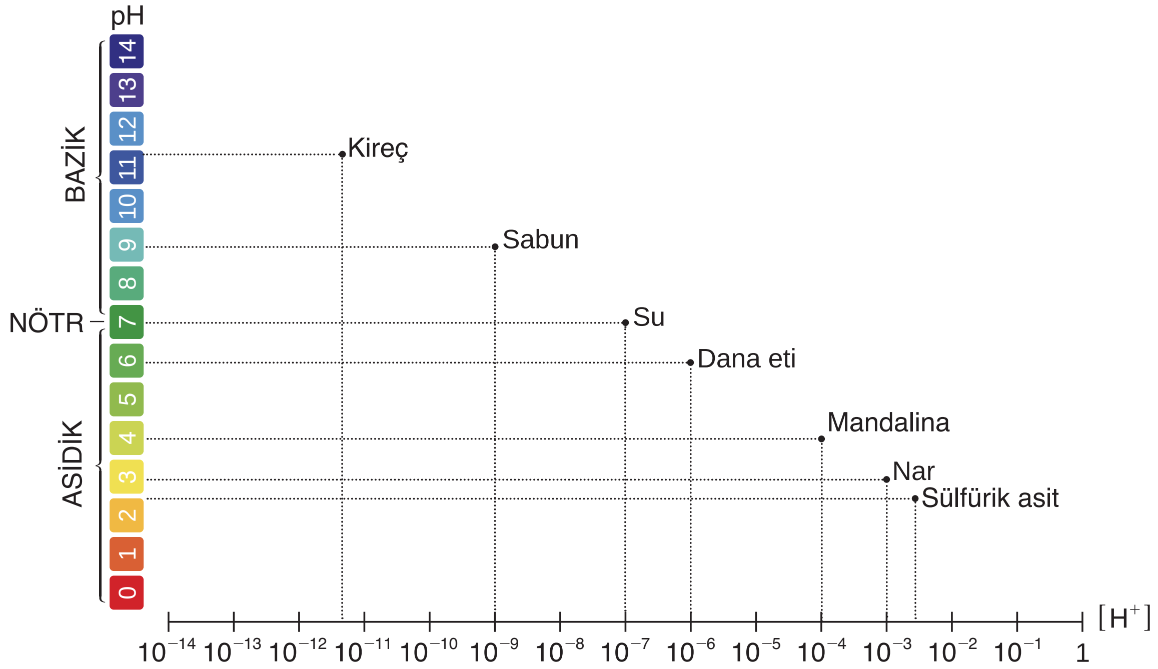
b) 2025 yılı sonunda kızının eğitimi için bireysel emeklilik sisteminden çıkmak isterse Hasan öğretmenin bankadan kaç TL alacağını bulunuz.

1.2. LOGARİTMA FONKSİYONU

Terimler ve Kavramlar

- Logaritma fonksiyonu
- Doğal logaritma

pH, bir çözeltinin asitlik veya bazlık derecesini gösteren ölçü birimidir ve bir çözeltinin içindeki hidrojen iyonu ($[H^+]$) yoğunluğunun hesaplanması ile belirlenir. pH ölçüsü $(0, 14)$ nda değer alır. pH, 7'den büyükse çözelti bazik, 7'den küçükse çözelti asidik ve 7 ise nötrdür. Örneğin suyun içindeki $[H^+]$ iyonu yoğunluğu 10^{-7} mol/l ve $pH = 7$'dir.



Yukarıdaki grafikte üstel olarak verilmiş $[H^+]$ iyonu yoğunluğunun pH değerinin hesaplanması için üssün negatif değeri bulunmalıdır. pH değeri verilmiş bir maddenin $[H^+]$ iyonu yoğunluğu $[H^+] = 10^{-pH}$ biçiminde hesaplanmaktadır.

Aşağıdaki soruları yukarıda verilen bilgilere göre cevaplayınız.

a) Aşağıda verilen tablodaki boşlukları doldurunuz.

	Kireç	Sabun	Su	Dana Eti	Mandalina	Nar	Sülfirik Asit
pH		9	7				
$[H^+]$	$10^{-11,2}$ mol/l		10^{-7} mol/l				$10^{-2,5}$ mol/l

b) Sabunun içindeki $[H^+]$ iyonu yoğunluğunun suyun içindeki $[H^+]$ iyonu yoğunluğundan kaç kat fazla olduğunu bulabilir misiniz?

Yukarıda verilen örnekte görüldüğü gibi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq 1$ biçiminde verilen üstel fonksiyonun tersinin bulunması ihtiyacı doğmuştur.

Hatırlatma Fonksiyonun Tersi

$f: A \rightarrow B$, $y = f(x)$ fonksiyonu bire bir ve örten bir fonksiyon olsun. $f^{-1}: B \rightarrow A$, $x = f^{-1}(y)$ şeklinde tanımlanan f^{-1} fonksiyonuna **f fonksiyonunun tersi** denir.

Bilgi

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$, $f(x) = a^{x}$, $a \in \mathbb{R}^{+}$ ve $a \neq 1$ üstel fonksiyonunun tersi olan f^{-1} fonksiyonuna **tabanı a olan logaritma fonksiyonu** denir ve $f^{-1}: \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f^{-1}(x) = y = \log_{a}x$ biçiminde yazılır. Bu ifade "logaritma a tabanında x" şeklinde okunur.

$a \in \mathbb{R}^{+}$, $a \neq 1$ ve $x > 0$ için $y = \log_{a}x \Leftrightarrow x = a^{y}$ olur.

Logaritmanın tanımı kullanılarak logaritmik veya üstel biçimde verilen eşitlikler birbirine dönüştürülebilir.

Üstel Biçimde Eşitlik		Logaritmik Biçimde Eşitlik
$x = a^{y}$ (Üs: y, Taban: a)	$\Leftrightarrow$	$\log_{a}x = y$ (Üs: y, Taban: a)
$\Downarrow$		$\Downarrow$
$10\,000 = 10^{4}$	$\Leftrightarrow$	$\log_{10}10\,000 = 4$
$32 = 2^{5}$	$\Leftrightarrow$	$\log_{2}32 = 5$
$\frac{1}{81} = 3^{-4}$	$\Leftrightarrow$	$\log_{3}\left(\frac{1}{81}\right) = -4$
$x = 7^{k}$	$\Leftrightarrow$	$\log_{7}x = k$

1. ÖRNEK

Aşağıdaki ifadelerde verilen x değerlerini bulunuz.

a) $\log_{2}4 = x$ **b)** $\log_{\frac{1}{5}}25 = x$ **c)** $\log_{\frac{1}{3}}x = 4$

ÇÖZÜM

a) $\log_{2}4 = x \Rightarrow 4 = 2^{x} \Rightarrow x = 2$

b) $\log_{\frac{1}{5}}25 = x \Rightarrow 25 = \left(\frac{1}{5}\right)^{x} \Rightarrow 5^{2} = 5^{-x} \Rightarrow x = -2$

c) $\log_{\frac{1}{3}}x = 4 \Rightarrow x = \left(\frac{1}{3}\right)^{4} \Rightarrow x = \frac{1}{81}$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 8

Bireysel Çalışma

Aşağıdaki tabloda üstel biçimde verilen eşitlikleri logaritmik biçimde; logaritmik biçimde verilen eşitlikleri üstel biçimde yazınız.

Üstel Biçim	Logaritmik Biçim
$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$	$\log_5 \sqrt[3]{5} = \frac{1}{3}$
$\sqrt{0,04} = 5^{-1}$	
$2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	
$\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \frac{16}{81}$	
$(0,001)^2 = 10^{-6}$	

Üstel Biçim	Logaritmik Biçim
$9 = (\sqrt{3})^4$	$\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$
	$\log_{0,\bar{1}} 81 = -2$
	$\log_{\frac{1}{8}} \sqrt{32} = -\frac{5}{6}$
	$\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{3} = \frac{2}{3}$
	$\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1) = -1$

Logaritma Fonksiyonunun En Geniş Tanım Kümesi

$f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ biçiminde tanımlı logaritma fonksiyonunda $a \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq 1$ dir. Bu durumda f fonksiyonunun tanımlı olması için $a > 0$, $a \neq 1$ koşullarının yanında $x > 0$ da olmalıdır. Benzer biçimde $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{g(x)} h(x)$ fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için

I. $g(x) > 0$
II. $g(x) \neq 1$
III. $h(x) > 0$

koşulları sağlanmalıdır.

2. ÖRNEK

$f(x) = \log_{(x-1)}(9 - x)$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = \log_{(x-1)}(9 - x)$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için
$x - 1 > 0$
$x - 1 \neq 1$
$9 - x > 0$
olmalıdır.
$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$
$x - 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$
$9 - x > 0 \Rightarrow x < 9$ olur.
Buradaki üç durumun ortak çözümü alınırsa f fonksiyonunun en geniş tanım kümesi $(1, 9) - \{2\}$ olarak elde edilir.

3. ÖRNEK

$f(x) = \log_{(x-2)}(5x - x^2)$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = \log_{(x-2)}(5x - x^2)$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun tanımlı olması için
$x - 2 > 0,\ x - 2 \neq 1$ ve $5x - x^2 > 0$ olmalıdır.

$\left.\begin{array}{l} x - 2 > 0 \\ 5x - x^2 > 0 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulmak için eşitsizliklerin işaret tablosu yapılır.

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ve

$5x - x^2 = 0 \Rightarrow x(5 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 5$

kökleri bulunur.

Bulunan kökler işaret tablosunda yazılır. Her iki eşitsizliğin pozitif olduğu ortak bölge eşitsizlik sisteminin çözüm kümesidir.

x	$-\infty$	0	2	5	$+\infty$
$x - 2 > 0$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$5x - x^2 > 0$	$-$	$+$	$+$	$-$	
			Çözüm		

x_1

$x_1 \notin Ç$

Aynı zamanda $x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3$ olacağı için $x = 3$ değeri çözüm kümesinden çıkarılır. Buradan f fonksiyonunun en geniş tanım kümesi $(2, 5) - \{3\}$ olur.

4. ÖRNEK

$f(x) = \log_5(4x^2 - (k - 3)x + 1)$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu her x gerçek sayı değeri için tanımlı olduğuna göre k nin değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonu her x gerçek sayı değeri için tanımlı olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}$ için $4x^2 - (k - 3)x + 1 > 0$ olmalıdır. Bunun için de denklemin gerçek kökünün olmaması gerekir.

Buradan $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$[-(k - 3)]^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 < 0$

$k^2 - 6k + 9 - 16 < 0$

$k^2 - 6k - 7 < 0$ olur.

Eşitsizliğin çözümü için $k^2 - 6k - 7 = 0$ denkleminin kökleri

$k^2 - 6k - 7 = 0$

$(k + 1)(k - 7) = 0$ olur.

$k_1 = -1$ ve $k_2 = 7$ bulunur.

$k^2 - 6k - 7 < 0$ eşitsizliğinin işaret tablosu yapılırsa

k	$-\infty$	-1	7	$+\infty$
$k^2 - 6k - 7 < 0$	$+$	$-$	$+$	
		Çözüm		

k nin değer aralığı $(-1, 7)$ olarak bulunur.

5. ÖRNEK

$f(x) = 2^{3x+1} - 5$ ise f^{-1} fonksiyonunun kuralını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$2^{3x+1} - 5 = y$$
$$2^{3x+1} = y + 5$$
$$3x + 1 = \log_2(y + 5)$$
$$x = \frac{\log_2(y+5) - 1}{3} \text{ olur.}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{\log_2(x+5) - 1}{3} \text{ bulunur.}$$

6. ÖRNEK

$f(x) = \log_3(x - 4) + 1$ ise f^{-1} fonksiyonunun kuralını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_3(x - 4) + 1 = y$$
$$\log_3(x - 4) = y - 1$$
$$x - 4 = 3^{y-1}$$
$$x = 3^{y-1} + 4 \text{ olur.}$$
$$f^{-1}(x) = 3^{x-1} + 4 \text{ bulunur.}$$

Ders İçi Uygulama 9 — Bireysel Çalışma

1. $f(x) = \log_{(1-x)}(x^2 - x - 30)$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

2. $f(x) = \log_3\left(\frac{x+1}{6x - x^2}\right)$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun tanım kümesindeki pozitif tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

Ders İçi Uygulama 10 — Bireysel Çalışma

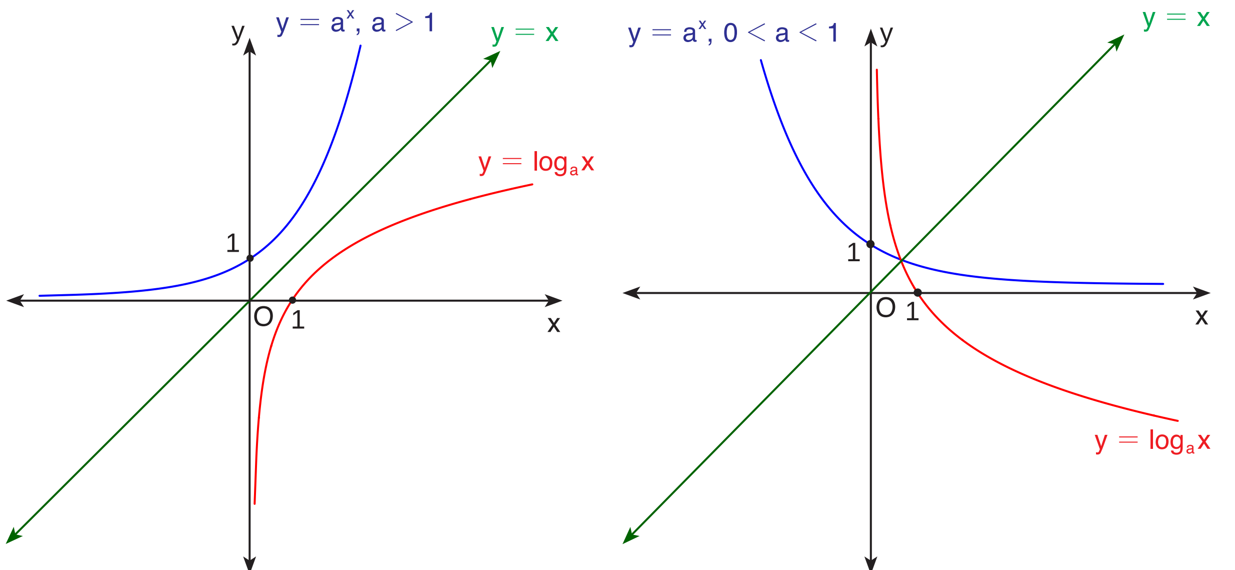
1. $f(x) = 3 \cdot 2^x - 7$ ise f^{-1} fonksiyonunun kuralını bulunuz.

2. $f(x) = 2 \cdot \log_5(3x + 1)$ ise f^{-1} fonksiyonunun kuralını bulunuz.

Logaritma Fonksiyonunun Grafiği

Bir fonksiyonun grafiği ile tersinin grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq 1$ biçiminde verilen üstel fonksiyonun grafiği üzerindeki noktaların $y = x$ doğrusuna göre simetriği alınarak bu fonksiyonun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x) = \log_a x$ fonksiyonunun grafiği çizilir.



7. ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$ ve $f^{-1}(x) = \log_2 x$ kuralları ile verilen fonksiyonların grafiğini aynı analitik düzlemde çiziniz ve bu fonksiyonların artan veya azalan olma durumlarını inceleyiniz.

ÇÖZÜM

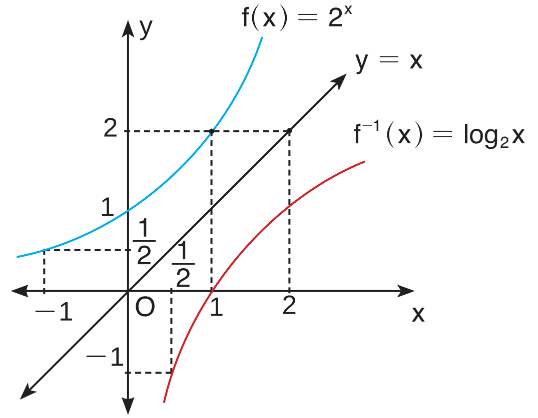
$f(x) = 2^x$ ve $f^{-1}(x) = \log_2 x$ kuralları ile verilen fonksiyonlar birbirinin tersi olduğundan fonksiyonların grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x) = 2^x$		↗	$\frac{1}{2}$	↗	1	↗	2	↗	

Tabanı 1 den büyük olduğundan f fonksiyonu artan bir fonksiyondur.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$f^{-1}(x) = \log_2 x$		↗	-1	↗	0	↗	1	↗	

Tabanı 1 den büyük olduğundan f^{-1} fonksiyonu artan bir fonksiyondur.



8. ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ve $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ kuralları ile verilen fonksiyonların grafiğini aynı analitik düzlemde çiziniz ve bu fonksiyonların artan veya azalan olma durumlarını inceleyiniz.

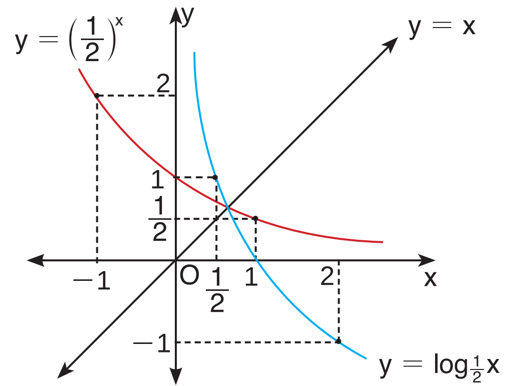
ÇÖZÜM

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$		↘	2	↘	1	↘	$\frac{1}{2}$	↘	

Tabanı 0 ile 1 arasında olduğundan f fonksiyonu azalan bir fonksiyondur.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$			1	↘	0	↘	-1	↘	

Tabanı 0 ile 1 arasında olduğundan f^{-1} fonksiyonu azalan bir fonksiyondur.

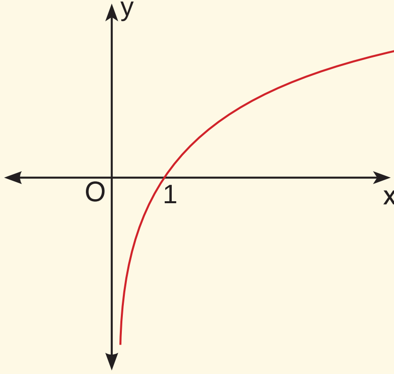


Bilgi

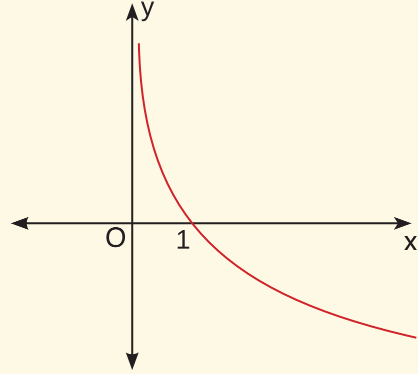
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tanımlı f üstel fonksiyonu artan fonksiyon ise f^{-1} logaritma fonksiyonu da artan fonksiyondur. Aynı şekilde f üstel fonksiyonu azalan fonksiyon ise f^{-1} logaritma fonksiyonu da azalan fonksiyondur.

Bilgi

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $y = f(x) = \log_a x$ logaritma fonksiyonu $a > 1$ için **artan bir fonksiyon,** $0 < a < 1$ için **azalan bir fonksiyondur.**



$a > 1 \Rightarrow y = \log_a x$
Artan fonksiyon

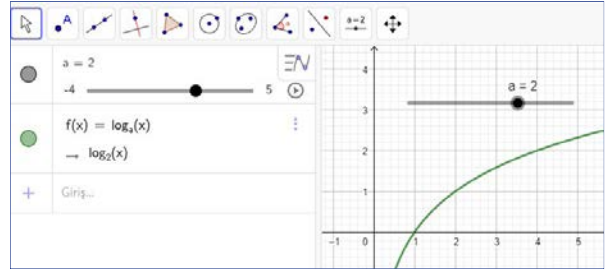


$0 < a < 1 \Rightarrow y = \log_a x$
Azalan fonksiyon

Ders İçi Uygulama 11 — Teknoloji

Dinamik matematik programında a nın aldığı farklı değerlere göre $f(x) = \log_a x$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun grafiğindeki değişimleri incelemek için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. Adım: Sürgü aracı seçildikten sonra grafik alanında boş bir yere tıklanır.
2. Adım: Sürgünün değerleri **a=2, Min: -4, Maks: 5, Artış: 0,1** olarak ayarlanır.
3. Adım: Giriş kısmına **log(a,x)** yazılarak $f(x) = \log_a x$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu oluşturulur.



$f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun grafiği

Yukarıdaki uygulamaya göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) a değeri $[-4, 0]$ nda veya 1 iken grafiğin görünmeme sebebini açıklayınız.

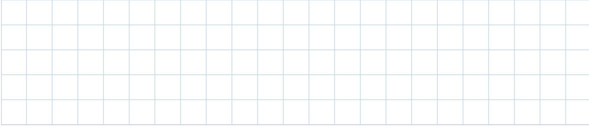
b) Sürgü $(0, 1)$ nda hareket ettirildiğinde oluşan grafiklerin ortak özelliğini açıklayınız.

c) Sürgü $(1, 5]$ nda hareket ettirildiğinde oluşan grafiklerin ortak özelliğini açıklayınız.

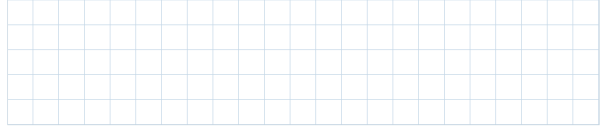
Ders İçi Uygulama 12 — Bireysel Çalışma

Aşağıdaki fonksiyonların grafiğini aynı analitik düzlem üzerinde çiziniz.

a) $f(x) = \log_5 x$ ve $g(x) = \log_3 x$



b) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ ve $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$



Gelenbevî İsmail Efendi (1726-1790)



Görsel 1.1 Gelenbevî İsmail Efendi (Temsilî)

(…)
"Ayaklı kütüphane" lakablı Müftüzade Mehmed Efendi'den fizik ve matematik öğrenmiştir. Arapça ve Farsça ile dinî ilimleri Yâsincizâde'den okumuştur. Ayrıca felsefe ve mantık gibi aklî ilimleri de öğrenmiştir. Böylece Gelenbevî çok iyi bir eğitim almış, bir bilim adamı olarak yetişmiştir. Nitekim 1774 yılında 33 veya 34 yaşındayken medreseler için açılan profesörlük sınavını kazanarak müderris olmuştur.

İslâm Bilim Adamları

(...)
Kâğıthane'de gerçekleştirilen bir bayramlaşma töreninde humbaracıların başarısız atışlar yapmasına çok üzülen padişah, istikamet hesaplarını doğru bir şekilde yapacak bir uzmanın bulunmasını emretmiş, bunun üzerine huzura getirilen Gelenbevî toplardaki açı hatalarını ince riyâzî hesaplarla düzeltmiş, böylece atışlarda tam isabet kaydedilmesini sağlamıştır. III. Selim bu başarısından dolayı Gelenbevî'yi çeşitli hediyelerle ödüllendirdi.
(...)

İslâm Ansiklopedisi

(*) Metin, yazıldığı dönemin yazım ve noktalama kurallarına sadık kalınarak alınmıştır.

John Napier (1550-1617)



Görsel 1.2 John Napier (Temsilî)

"Sayıları hesaplama" anlamına gelen "logaritma" terimi Napier (Neypiyr) tarafından icat edilmiştir. İcatlarının "beklenmedik bir olay" olarak meydana geldiği, başkalarının çalışmaları veya önceki düşünce zincirleri ile bağlantısı olmadığı söylenir. Napier, 20 yıl boyunca "genel kurallar" olarak adlandırdığı logaritmik tabloları derlemek için sürekli olarak çaba sarf etmiştir.

(…)
Napier'ın logaritmayı icat etmedeki amacı, büyük sayıları içeren, meşakkatli çaba gerektiren hesaplamalara destek sağlamaktır.
Eserleri: Wonderful Table of Logarthms, Mirifici Logaritmorum Canonis Deseriptio.

The History of Mathematics

(*) Metin, yazıldığı dönemin yazım ve noktalama kurallarına sadık kalınarak alınmıştır.

1. Aşağıdaki logaritmik ifadeleri üstel biçimde yazınız.

a) $\log_3 81 = 4$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$

c) $\log_5 (5\sqrt{5}) = \frac{3}{2}$

ç) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$

2. Aşağıda verilen ifadelerdeki x değerlerini bulunuz.

a) $\log_3 x = 5$

b) $\log_3 x = -\frac{1}{3}$

c) $\log_x 32 = 5$

3. $f: \mathbb{R} \rightarrow (7, +\infty)$, $f(x) = 5^{x-2} + 7$ **olduğuna göre** f^{-1} **fonksiyonunun kuralını bulunuz.**

4. $f: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_5\left(\frac{1-x}{2}\right)$ **olduğuna göre** f^{-1} **fonksiyonunun kuralını bulunuz.**

5. $f(x) = \log_{(x+1)}(6 - x)$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.**

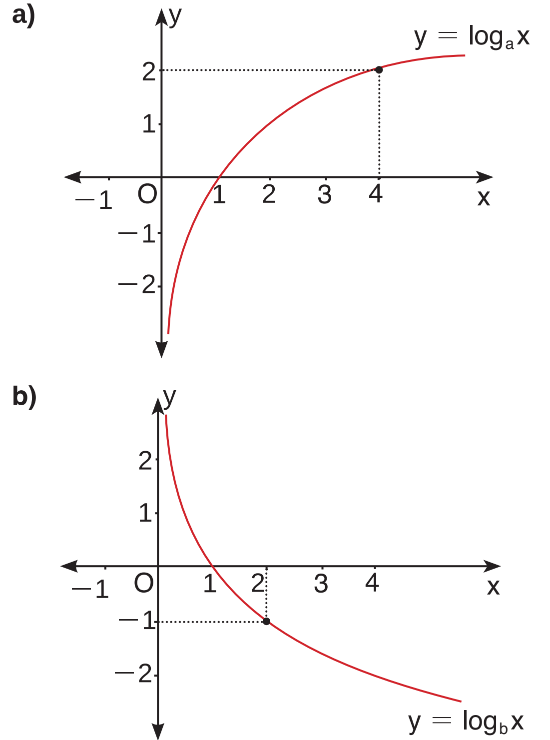
6. $f(x) = \log_{\frac{2}{3}}(x^2 - 2x + m + 3)$ **biçiminde tanımlanan f fonksiyonu her x gerçek sayı değeri için tanımlı olduğuna göre m nin değer aralığını bulunuz.**

7. Aşağıdaki logaritmik fonksiyonların grafiklerini çizerek artan veya azalan olma durumlarını inceleyiniz.

a) $y = \log_3 x$

b) $y = \log_{\frac{3}{4}} x$

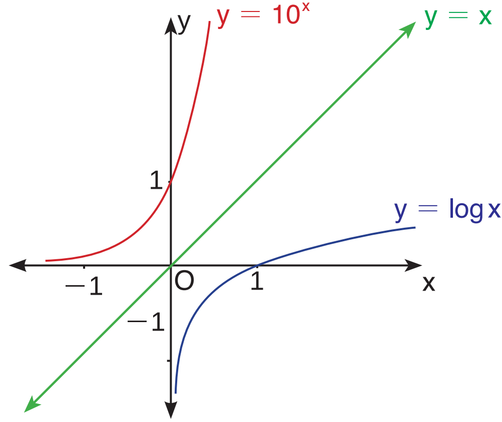
8. Aşağıda verilen grafiklerdeki a ve b değerlerini bulunuz.



10 Tabanında Logaritma Fonksiyonu

Bilgi

Tabanı 10 olan logaritma fonksiyonuna **10 tabanında logaritma (adi logaritma veya bayağı logaritma) fonksiyonu** denir. 10 tabanında logaritma fonksiyonu $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_{10} x = \log x$ biçiminde gösterilir. Buradan $\log x = y \Leftrightarrow 10^y = x$ olur.



$y = 10^x$ ve $y = \log x$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlar birbirinin tersi olduğu için $y = x$ doğrusuna göre simetriktir. Aynı zamanda her iki fonksiyon da artandır.

9. ÖRNEK

Aşağıdaki logaritmik ifadelerin değerini bulunuz.

a) $\log 1000$ **b)** $\log 0,0001$ **c)** $\log \sqrt[3]{100}$

ÇÖZÜM

$\log x = y \Leftrightarrow 10^y = x$ olduğundan

a) $\log 1000 = a \Rightarrow 1000 = 10^a \Rightarrow 10^3 = 10^a \Rightarrow a = 3$

b) $\log 0,0001 = b \Rightarrow 0,0001 = 10^b \Rightarrow 10^{-4} = 10^b \Rightarrow b = -4$

c) $\log \sqrt[3]{100} = c \Rightarrow \sqrt[3]{100} = 10^c \Rightarrow 10^{\frac{2}{3}} = 10^c \Rightarrow c = \frac{2}{3}$ bulunur.

Euler Sayısı

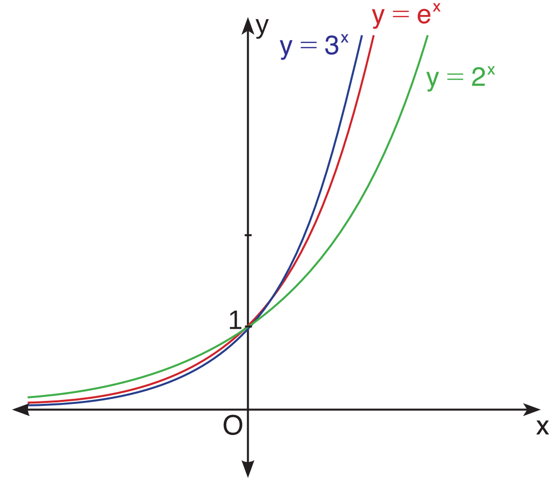
Olasılık, karbon testi, nüfus artışı, ilaçların etki süreleri gibi matematik ve mühendislikte karşılaşılan pek çok problemin çözümünün modellenmesinde Euler (Oylr) sayısı kullanılmaktadır. Örneğin bir oyuncu, kazanma şansı $\frac{1}{n}$ olan bir oyunu n kez oynarsa yaklaşık $\frac{1}{e}$ (%36,787...) olasılıkla hiçbirinde kazanamayacaktır. n ne kadar büyükse oyuncunun kazanmama olasılığı $\frac{1}{e}$ sayısına o kadar yakın olur.

Yandaki tabloda n değeri arttıkça $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ifadesi irrasyonel bir sayı olan **Euler sayısı** veya **e sayısı** olarak adlandırılan bir sayıya yaklaşık olarak eşit olur. e sayısı aynı zamanda $e=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...$ sonsuz toplamına da eşit olan bir sayıdır ve bu sayının yaklaşık değeri $e \cong 2,71828182845904523536...$ şeklindedir.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
5	2,48832
10	2,59374
100	2,71692
1000000	2,71828
⋮	⋮

e sayısına ilk kez İskoçyalı matematikçi Napier 1618'de logaritma üzerine yayımladığı bir kitabın ekinde değinmiştir. Fakat sabitin kendisi ile fazla ilgilenmemiştir. e sayısını gerçek anlamda ilk keşfeden matematikçi Jocob Bernouilli (Yakop Bernovli) olmuştur. Bernouilli bileşik faiz problemlerini incelerken bu sayıyı keşfetmiş ve bu sayının yaklaşık değerini hesaplamıştır. İsveçli matematikçi Leonhard Euler (Lionhard Oylr) e sayısına ismini vermiştir. Euler, e sayısının irrasyonel bir sayı olduğunu da ispatlamıştır.

e sayısı 2 ile 3 arasında yer alan bir sayı olup $y=e^x$ şeklinde tanımlanan üstel fonksiyonun grafiği $y=2^x$ ile $y=3^x$ fonksiyonlarının grafiği arasında yer alır.



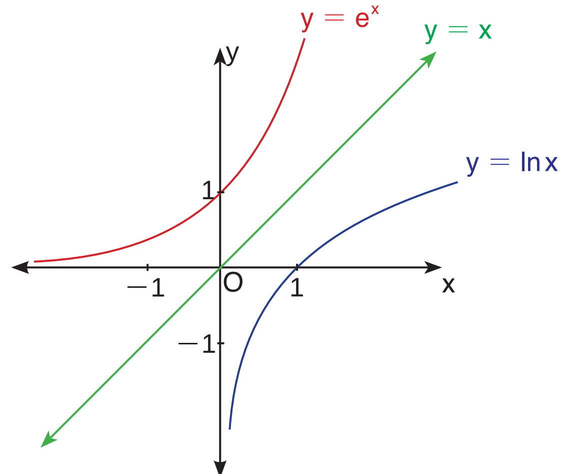
Doğal Logaritma Fonksiyonu

Bilgi

Tabanı e sayısı olan logaritma fonksiyonuna **doğal logaritma fonksiyonu** denir.
$f:\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=\log_e x = \ln x$ biçiminde gösterilir. $\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$ olur.

$f^{-1}(x)=\ln x$ şeklinde tanımlanan f^{-1} fonksiyonunun grafiği, $f(x)=e^x$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun grafiğinin $y=x$ doğrusuna göre simetriği alınarak yandaki gibi çizilir.

$f^{-1}(x)=\ln x$ şeklinde tanımlanan f^{-1} fonksiyonunun tabanı 1 den büyük olduğu için fonksiyon artandır.



10. ÖRNEK

Aşağıdaki logaritmik ifadelerin değerini bulunuz.

a) $\ln e$ **b)** $\ln e^{-2}$ **c)** $\ln e^{\frac{3}{5}}$

ÇÖZÜM

$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$ olduğundan

a) $\ln e = y \Rightarrow e^y = e \Rightarrow y = 1$

b) $\ln e^{-2} = y \Rightarrow e^y = e^{-2} \Rightarrow y = -2$

c) $\ln e^{\frac{3}{5}} = y \Rightarrow e^y = e^{\frac{3}{5}} \Rightarrow y = \frac{3}{5}$ bulunur.

11. ÖRNEK

$\ln(3x + 2) = y$ olduğuna göre x in y türünden değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\ln(3x + 2) = y$ ise

$\log_e(3x + 2) = y$

$3x + 2 = e^y$ olur.

$x = \frac{e^y - 2}{3}$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 13

Bireysel Çalışma

1. Aşağıdaki logaritmik ifadelerin değerini bulunuz.

a) $\log 10$ **c)** $\log 0,01$ **d)** $\log \sqrt[3]{10000}$

b) $\ln e^3$ **ç)** $\ln e^{-3}$ **e)** $\ln e^{\sqrt{5}}$

2. $f(x) = \ln(1 - x) + 3$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun tersini bulunuz.

Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri ve Uygulamaları

$a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ olmak üzere logaritma fonksiyonunun özellikleri aşağıda verilmiştir.

1. $\log_a 1 = 0$

$\log_a 1 = n \in \mathbb{R}$ olsun.
$\log_a 1 = n \Leftrightarrow a^n = 1$ olduğundan $n = 0$ bulunur.

Örneğin $\log_5 1 = 0$, $\log_{\frac{3}{5}} 1 = 0$, $\log_{\sqrt{7}} 1 = 0$, $\log 1 = 0$ ve $\ln 1 = 0$ olur.

12. ÖRNEK

$\log_{\sqrt{5}} 1 - 3\ln 1 + \log_{2,\bar{9}} 1 + \log_{\sqrt{3}+1} 1$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\log_a 1 = 0$ olduğundan

$$\underbrace{\log_{\sqrt{5}} 1}_{0} - 3\underbrace{\ln 1}_{0} + \underbrace{\log_{2,\bar{9}} 1}_{0} + \underbrace{\log_{\sqrt{3}+1} 1}_{0} = 0 - 3 \cdot 0 + 0 + 0 = 0 \text{ bulunur.}$$

2. $\log_a a = 1$

$\log_a a = n \ (n \in \mathbb{R})$ olsun.

$\log_a a = n \Leftrightarrow a^n = a^1$ olduğundan $n = 1$ bulunur.

Örneğin $\log_5 5 = 1$, $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right) = 1$, $\log 10 = 1$ ve $\ln e = 1$ olur.

13. ÖRNEK

$\ln e + \log_{\sqrt{7}} \sqrt{7} + 2 - \log_{\sqrt{5}} 1 - \log 10$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\log_a a = 1$ ve $\log_a 1 = 0$ dır.

$$\underbrace{\ln e}_{1} + \underbrace{\log_{\sqrt{7}} \sqrt{7}}_{1} + 2 - \underbrace{\log_{\sqrt{5}} 1}_{0} - \underbrace{\log_{10} 10}_{1} = 1 + 1 + 2 - 0 - 1$$
$$= 3 \text{ bulunur.}$$

3. $\log_a a^x = x \ (x \in \mathbb{R})$

$n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\log_a a^x = n \Leftrightarrow a^n = a^x$ olduğundan $n = x$ bulunur.

Örneğin $\log_5 5^4 = 4$, $\log_7 \sqrt{\sqrt[3]{7}} = \log_7 7^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$, $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = -5$, $\log 10^{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{5}$ ve $\ln e^{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ olur.

14. ÖRNEK

$\log 10\,000 = x$ ve $\log(9y + 1) = 1$ olduğuna göre $x + y$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\log 10\,000 = x$ ise

$10^4 = 10^x$

$x = 4$ olur.

$\log(9y + 1) = 1$ ise

$9y + 1 = 10^1$

$9y = 9 \Rightarrow y = 1$ olur.

$x + y = 4 + 1 = 5$ bulunur.

15. ÖRNEK

$x = \log_2 25$

$y = \log_3 58$

$z = \log_5 103$

sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

ÇÖZÜM

$2^4 < 25 < 2^5$ olduğundan $\log_2 2^4 < \log_2 25 < \log_2 2^5$

$4 < \log_2 25 < 5$ olur. $\Rightarrow 4 < x < 5$ bulunur.

$3^3 < 58 < 3^4$ olduğundan $\log_3 3^3 < \log_3 58 < \log_3 3^4$

$3 < \log_3 58 < 4$ olur. $\Rightarrow 3 < y < 4$ bulunur.

$5^2 < 103 < 5^3$ olduğundan $\log_5 5^2 < \log_5 103 < \log_5 5^3$

$2 < \log_5 103 < 3$ olur. $\Rightarrow 2 < z < 3$ bulunur.

Bu durumda $z < y < x$ sıralaması elde edilir.

4. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $(x,\ y \in \mathbb{R}^+)$

$n, k \in \mathbb{R}$ olsun.

$\log_a x = n \Leftrightarrow x = a^n$

$\log_a y = k \Leftrightarrow y = a^k$ olur.

$$\begin{aligned}\log_a(x \cdot y) &= \log_a(a^n \cdot a^k)\\ &= \log_a(a^{n+k})\\ &= n + k\\ &= \log_a x + \log_a y \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Örneğin

$$\begin{aligned}\log_3 18 &= \log_3(9 \cdot 2)\\ &= \log_3 9 + \log_3 2\\ &= \log_3 3^2 + \log_3 2\\ &= 2 + \log_3 2\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\log 50 &= \log(10 \cdot 5)\\ &= \log 10 + \log 5\\ &= 1 + \log 5 \text{ olur.}\end{aligned}$$

16. ÖRNEK

$\log_3 a + \log_3 b = 2$

$\log_2(a + b) = 3$

olduğuna göre $a^2 + b^2$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\log_3 a + \log_3 b = \log_3(a.b) = 2 \Rightarrow a.b = 3^2 \Rightarrow a.b = 9$ olur.

$\log_2(a + b) = 3$ ise

$a + b = 2^3 \Rightarrow a + b = 8$ olur.

$(a + b)^2 = 8^2$

$a^2 + 2\underbrace{ab}_{9} + b^2 = 64 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2.9 = 64$

$a^2 + b^2 = 46$ bulunur.

17. ÖRNEK

$\log_2 \cot 1° + \log_2 \cot 2° + \log_2 \cot 3° + ... + \log_2 \cot 88° + \log_2 \cot 89°$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\log_2 \cot 1° + \log_2 \cot 2° + ... + \log_2 \cot 88° + \log_2 \cot 89° = \log_2(\cot 1° \cdot \cot 2° \cdot \cot 3° \cdot ... \cdot \cot 88° \cdot \cot 89°)$

$= \log_2(\cot 1° \cdot \cot 2° \cdot ... \cdot \cot 45° \cdot ... \cdot \tan 2° \cdot \tan 1°)$

1 1 1

$= \log_2(1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1)$

$= \log_2 1 = 0$ bulunur.

$\tan x \cdot \cot x = 1$

Ders İçi Uygulama 14 — Bireysel Çalışma

1. $\log(0,1) + \ln e^4 - \log_3 \sqrt[3]{3}$ ifadesinin değerini bulunuz.

2. $a = \log_2 5$ ve $b = \log_2 9$ olmak üzere $\log_2 45$ ifadesinin a ve b türünden değerini bulunuz.

3. $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\log_3 a + \log_3 b = 2$ ve $\log_2(a - b) = 3$ olduğuna göre $a^2 + b^2$ ifadesinin değerini bulunuz.

5. $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$ ($x \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{R}$)

$\log_a x^n = \log_a \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{n \text{ tane}} = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \ldots + \log_a x}_{n \text{ tane}} = n \cdot \log_a x$ bulunur.

Örneğin

$\log_3 7^2 = 2 \cdot \log_3 7$

$\log_{\frac{2}{3}} 2^5 = 5 \cdot \log_{\frac{2}{3}} 2$

$\log 27 = \log 3^3 = 3 \cdot \log 3$ olur.

18. ÖRNEK

$\log 2 = a$

$\log 3 = b$

olmak üzere $\log 45$ ifadesinin a ve b türünden değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\log 45 = \log(3^2 \cdot 5)$

$= \log 3^2 + \log 5$

$= 2 \cdot \log 3 + \log 5$

$= 2b + (1 - \log 2) = 2b + 1 - a$ bulunur.

$\log 10 = 1$

$\log(2 \cdot 5) = 1$

$\log 2 + \log 5 = 1$

$\log 5 = 1 - \log 2$

19. ÖRNEK

$\log(0{,}01) - \ln\frac{1}{e^3} + \log_5 125$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_{10}(0{,}01) - \ln\frac{1}{e^3} + \log_5 125 = \log_{10} 10^{-2} - \ln e^{-3} + \log_5 5^3$$

$$= -2 \cdot \underbrace{\log_{10} 10}_{1} - (-3) \cdot \underbrace{\ln e}_{1} + 3 \cdot \underbrace{\log_5 5}_{1}$$

$$= -2 + 3 + 3 = 4 \text{ bulunur.}$$

Ders İçi Uygulama 15 — Bireysel Çalışma

1. $\log_2 3 = a$ ve $\log_2 5 = b$ ise $\log_2 1125$ ifadesinin a ve b türünden değerini bulunuz.

2. $\dfrac{\log_2 27 - 3}{2 - \log_2 9}$ ifadesinin değerini bulunuz.

6. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \ (x,\ y \in \mathbb{R}^+)$

$\log_a x = n \Rightarrow x = a^n$

$\log_a y = k \Rightarrow y = a^k$ olur.

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(\frac{a^n}{a^k}\right) = \log_a(a^{n-k}) = (n-k)\underbrace{\log_a a}_{1} = n - k = \log_a x - \log_a y$ bulunur.

Örneğin

$\log(0,5) = \log\frac{5}{10} = \log 5 - \underbrace{\log 10}_{1} = \log 5 - 1$

$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \underbrace{\ln 1}_{0} - \underbrace{\ln e}_{1} = -1$ olur.

20. ÖRNEK

$\log 2 = x + 1$ olduğuna göre $\log 25$ ifadesinin x türünden değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\log 2 = \log\left(\frac{10}{5}\right) = \log 10 - \log 5$ olur.

$x + 1 = 1 - \log 5$

$\log 5 = -x$ olur.

$\log 25 = \log 5^2 = 2 \cdot \underbrace{\log 5}_{-x} = -2x$ bulunur.

21. ÖRNEK

$\log_{24} 12 = x$ olduğuna göre $\log_{24} 16$ ifadesinin x türünden değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\log_{24}\left(\frac{24}{2}\right) = \underbrace{\log_{24} 24}_{1} - \log_{24} 2 = x$

$1 - \log_{24} 2 = x$

$1 - x = \log_{24} 2$ olur.

$\log_{24} 16 = \log_{24} 2^4 = 4 \cdot \log_{24} 2 = 4 \cdot (1 - x) = 4 - 4x$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 16 — Bireysel Çalışma

$\log_6 3 = a$ olduğuna göre $\log_6 64$ ifadesinin a türünden değerini bulunuz.

7. Taban Değiştirme Özelliği $(x, a, b, c \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1)$

$$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a} \text{ ve } \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$\log_a x = n \Leftrightarrow x = a^n \ (n \in \mathbb{R})$ olur. Eşitliğin her iki tarafının c tabanında logaritması alınırsa

$\log_c x = \log_c a^n$

$\log_c x = n \cdot \log_c a$

$n = \dfrac{\log_c x}{\log_c a}$ olur.

$\log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a}$ elde edilir. Taban değiştirme özelliğinden

$\log_b a = \dfrac{\log_a a}{\log_a b} = \dfrac{1}{\log_a b}$ bulunur.

Örneğin $\log_5 2$ farklı tabanlarda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$\log_5 2 = \dfrac{\log_3 2}{\log_3 5} = \dfrac{\log 2}{\log 5} = \dfrac{\ln 2}{\ln 5}$ olur.

Ayrıca $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$ olduğundan $\log_5 2 = \dfrac{1}{\log_2 5}$ olur.

22. ÖRNEK

$\log_3 5 = x$

$\log_5 7 = y$

olduğuna göre $\log_{15} 35$ ifadesinin x ve y türünden değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\log_3 5 = x$

$\log_5 3 = \dfrac{1}{x}$ olur.

$$\log_{15} 35 = \frac{\log_5 35}{\log_5 15} = \frac{\log_5 5 + \log_5 7}{\log_5 5 + \log_5 3} = \frac{1 + y}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1 + y}{\frac{x + 1}{x}} = \frac{x + xy}{x + 1} \text{ bulunur.}$$

23. ÖRNEK

$\log_3 2 = m$

$\log_3 7 = n$

ise $\log_{18} 392$ ifadesinin m ve n türünden değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_{18} 392 = \frac{\log_3 392}{\log_3 18}$$

$$= \frac{\log_3 (2^3 \cdot 7^2)}{\log_3 (2 \cdot 3^2)}$$

$$= \frac{\log_3 2^3 + \log_3 7^2}{\log_3 2 + \log_3 3^2} = \frac{3\log_3 2 + 2\log_3 7}{\log_3 2 + 2\underbrace{\log_3 3}_{1}} = \frac{3m + 2n}{m + 2} \text{ bulunur.}$$

24. ÖRNEK

$\dfrac{1}{\log_8 6} + \dfrac{1}{\log_{18} 6} + \dfrac{1}{\log_{54} 6}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\dfrac{1}{\log_8 6} + \dfrac{1}{\log_{18} 6} + \dfrac{1}{\log_{54} 6} = \log_6 8 + \log_6 18 + \log_6 54$$
$$= \log_6 (8 \cdot 18 \cdot 54)$$
$$= \log_6 (2^3 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 3^3) = \log_6 (2^5 \cdot 3^5) = \log_6 6^5 = 5 \text{ olur.}$$

Ders İçi Uygulama 17 — Bireysel Çalışma

1. $\dfrac{1}{\log_{16} 12} + \dfrac{1}{\log_9 12}$ ifadesinin değerini bulunuz.

2. $\log 3 = a$ olduğuna göre $\log_{30} 90$ ifadesinin a türünden değerini bulunuz.

3. $\log(12 - \log(2x + 10)) = 1$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

4. $\ln 3 = a$ ve $\ln 5 = b$ ise $\ln 45$ ifadesinin a ve b türünden değerini bulunuz.

8. $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \ldots \cdot \log_m n = \log_a n$ $(a, b, c, d, \ldots, m \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $n \in \mathbb{R}^+)$

Taban değiştirme özelliğinden

$$\frac{\log b}{\log a} \cdot \frac{\log c}{\log b} \cdot \frac{\log d}{\log c} \cdot \ldots \cdot \frac{\log n}{\log m} = \frac{\log n}{\log a} = \log_a n \text{ bulunur.}$$

Örneğin $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8 = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$ bulunur.

25. ÖRNEK

$\log_3 \sqrt{2} \cdot \log_{\sqrt{2}} 25 \cdot \log_x 27 = 6$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_3 \sqrt{2} \cdot \log_{\sqrt{2}} 25 \cdot \log_x 27 = 6$$

$$\log_3 \sqrt{2} \cdot \log_{\sqrt{2}} 5^2 \cdot \log_x 3^3 = 6$$

$$\frac{\log\sqrt{2}}{\log 3} \cdot \frac{2\log 5}{\log\sqrt{2}} \cdot \frac{3\log 3}{\log x} = 6$$

$$6 \cdot \frac{\log 5}{\log x} = 6$$

$$\log_x 5 = 1 \Rightarrow x = 5 \text{ bulunur.}$$

Ders İçi Uygulama 18 — Bireysel Çalışma

1. $\log_2 \sqrt{3} \cdot \log_9 125 \cdot \log_5 8$ ifadesinin değerini bulunuz.

2. $\log_3 5 = a$ olduğuna göre $\log_{25} 4 \cdot \log_7 9 \cdot \log_2 49$ ifadesinin a türünden değerini bulunuz.

9. $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$ $(a, b \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1,\ m, n \in \mathbb{R}$ ve $n \neq 0)$

$$\log_{a^n} b^m = \frac{\log b^m}{\log a^n} = \frac{m \cdot \log b}{n \cdot \log a} = \frac{m}{n}\log_a b \text{ bulunur.}$$

Örneğin $\log_{27} 81 = \log_{3^3} 3^4 = \frac{4}{3}\underbrace{\log_3 3}_{1} = \frac{4}{3}$ olur.

26. ÖRNEK

$\log_8 4 - \log_{\frac{1}{9}} 81$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_8 4 - \log_{\frac{1}{9}} 81 = \log_{2^3} 2^2 - \log_{3^{-2}} 3^4$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \underbrace{\log_2 2}_{1} - \frac{4}{-2} \cdot \underbrace{\log_3 3}_{1}$$
$$= \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3} \text{ bulunur.}$$

27. ÖRNEK

$\log_3 2 = x$
$\log_3 5 = y$

olduğuna göre $\log_9 200$ ifadesinin x ve y türünden değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$200 = 8 \cdot 25 = 2^3 \cdot 5^2$ ve
$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ olduğundan

$$\log_9 200 = \log_{3^2} (2^3 \cdot 5^2)$$
$$= \log_{3^2} 2^3 + \log_{3^2} 5^2$$
$$= \frac{3}{2} \cdot \log_3 2 + \frac{2}{2} \cdot \log_3 5 = \frac{3}{2} \cdot \underbrace{\log_3 2}_{x} + \underbrace{\log_3 5}_{y} = \frac{3}{2} \cdot x + y \text{ bulunur.}$$

Ders İçi Uygulama 19 — Bireysel Çalışma

1. $\log_2 3 = x$ olduğuna göre $\log_9 8$ ifadesinin x türünden değerini bulunuz.

2. $x > 2$ ve
$a = x^2 - 2x + 1$
$b = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
olduğuna göre $\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt{b}$ ifadesinin değerini bulunuz.

10. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ **(a, c ∈ $\mathbb{R}^+$ ve b ∈ $\mathbb{R}^+ - \{1\}$)**

$a^{\log_b c} = x$ eşitliğinin her iki tarafının c tabanında logaritması alınırsa

$\log_c a^{\log_b c} = \log_c x \ (x \in \mathbb{R}^+)$

$\log_b c \cdot \log_c a = \log_c x$

$\dfrac{\log c}{\log b} \cdot \dfrac{\log a}{\log c} = \log_c x$

$\log_b a = \log_c x \Rightarrow x = c^{\log_b a}$ olur.

Buradan $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ olduğu görülür.

Örneğin $7^{\log_2 3} = 3^{\log_2 7}$ olur.

28. ÖRNEK

$9^{\log_3 x} + 2^{\log_2 x} = \log_{\sqrt{5}} 5$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$9^{\log_3 x} + 2^{\log_2 x} = \log_{\sqrt{5}} 5$

$x^{\log_3 3^2} + x^{\log_2 2} = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^1$

$x^{2\cdot\overbrace{\log_3 3}^{1}} + x^1 = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} \underbrace{\log_5 5}_{1}$

$x^2 + x = 2$

$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)\cdot(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = -2$ veya $x_2 = 1$ bulunur.

Logaritma fonksiyonunun tanımı gereği $x > 0$ olmalıdır. Buradan $x = 1$ bulunur.

11. $a^{\log_a x} = x$ **(x ∈ $\mathbb{R}^+$)**

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ özelliği kullanılarak $a^{\log_a x} = x^{\log_a a} = x$ elde edilir.

Örneğin $5^{\log_5 3} = 3$, $(\sqrt{2})^{\log_{\sqrt{2}} 6} = 6$, $10^{\log 11} = 11$ ve $e^{\ln\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{7}$ olur.

29. ÖRNEK

$4^{\log_{(x-3)} 9} = 81$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$4^{\log_{(x-3)} 9} = 81$

$9^{\log_{(x-3)} 4} = 9^2$

$\log_{(x-3)} 4 = 2$

$4 = (x-3)^2$

$|x-3| = 2$

$x - 3 = 2$ veya $x - 3 = -2$ olur.

Buradan $x_1 = 1$ veya $x_2 = 5$ bulunur.

Logaritma fonksiyonunun tanımı gereği $x - 3 > 0$ ise $x > 3$ olduğundan $x = 5$ olmalıdır.

30. ÖRNEK

$3^{\log_3 25} + 16^{\log_4 5}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$
\begin{aligned}
3^{\log_3 25} + 16^{\log_4 5} &= 3^{\log_3 25} + 5^{\log_4 16} \\
&= 3^{\log_3 25} + 5^{\log_4 4^2} \\
&= 25^{\log_3 3} + 5^{2 \cdot \log_4 4} \\
&= 25 + 5^2 \\
&= 25 + 25 = 50 \text{ bulunur.}
\end{aligned}
$$

Ders İçi Uygulama 20

Bireysel Çalışma

1. $(3 - \sqrt{8})^{\log_{(3+\sqrt{8})}(x+2)} = \frac{1}{5}$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

2. $5^{\log(x+3)} - (2x - 5)^{\log 5} = 0$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

3. $e^{2-\ln 3}$ ifadesinin değerini bulunuz.

4. $10^{2-\log 4} + 25^{\log_4 2}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Ders İçi Uygulama 21

Bireysel Çalışma

Aşağıdaki bilgileri kullanarak verilen soruları cevaplayınız.

Matematik öğretmeni, sınıfındaki öğrencilerden logaritmik fonksiyonların özelliklerini kullanabilecekleri bir oyun tasarlamalarını ister. Utku'nun hazırladığı oyunu beğenir ve sınıfta oynatmaya karar verir. Oyunda kullanılacak kartlar aşağıda gösterilmiştir.

1. Kart: $\log_2 x$

Mavi Torbada Bulunan Kartlar: 2, 4, 8, 16, 32, 64

2. Kart: $\log_x 2$

Kırmızı Torbada Bulunan Kartlar: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$

Oyunun kuralları şu şekildedir:

1. Adım: Oyun için iki kişi belirlenecektir.

2. Adım: İlk oyuncu mavi ve kırmızı torbalardan birer tane kart çekecektir.

3. Adım: İlk oyuncu mavi torbadan çektiği kartın üzerinde yazan sayıyı 1. karttaki x yerine, kırmızı torbadan çektiği kartın üzerinde yazan sayıyı da 2. karttaki x yerine yazarak yazılan değerleri hesaplayacak ve çektiği kartları tekrar torbaya koyacaktır.

4. Adım: Bulduğu değerlerin toplamı öğrencinin puanı olacaktır.

5. Adım: Diğer öğrenci aynı adımları takip ederek puanını belirleyecektir.

6. Adım: Puanı fazla olan öğrenci oyunu kazanacaktır.

Aşağıdaki soruları yukarıda verilen bilgilere göre cevaplayınız.

1. Mavi ve kırmızı torbalardan sırasıyla Ege üzerlerinde 8 ve $\frac{1}{32}$ yazan kartları, Ayfer ise üzerlerinde 4 ve $\frac{1}{2}$ yazan kartları çektiğinde oyunu kimin kazanacağını bulunuz.

2. Arkın mavi torbadan üzerinde 2 yazan kartı çekmiş ve toplamda 0,5 puan almıştır. Arkın'ın kırmızı torbadan hangi kartı çektiğini bulunuz.

3. Bir öğrencinin bu oyundan alabileceği en yüksek puanı bulunuz.

1. Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\dfrac{\log_9 \sqrt{3} + \log_{\sqrt{2}} 32}{\log_{25} \sqrt{5}}$

b) $3\log_{32} 64 - \log_{81} 243$

c) $\ln\left(\sqrt{2} \cdot \log 100^{(e^{20})}\right)$

ç) $\log e^3 \cdot \ln(0{,}01)$

d) $\log\left(10\sqrt{10} \cdot \sqrt{\sqrt{10}}\right)$

e) $\dfrac{3}{\log_2 20} - \dfrac{1}{\log_2 20} + \dfrac{1}{\log_5 20}$

2. $\log 3 = a$ **ve** $\log 4 = b$ **olduğuna göre** $\log_6 135$ **ifadesinin a ve b türünden değerini bulunuz.**

3. $\log_3 64$, $\log_{\sqrt{2}} 81$ **ve** $\log_4 25$ **sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.**

4. $\log 2 \cong 0{,}301$ **olduğuna göre** $\log 250$ **ifadesinin yaklaşık değerini bulunuz.**

5. Aşağıdaki ifadelerin hangi ardışık tam sayılar arasında olduğunu bulunuz.

a) $\log 16$

b) $\log 985$

c) $\log(0{,}3)$

ç) $\log \sqrt{e}$

6. $\log_3 80! = a$ **olduğuna göre** $\log_9 81!$ **ifadesinin a türünden değerini bulunuz.**

7. $a, b, c \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ **ve** $a^2 b^3 c^4 = x^3$ **olduğuna göre** $\dfrac{4}{\log_a x} + \dfrac{6}{\log_b x} + \dfrac{8}{\log_c x} - 6$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

8. $\dfrac{\log_4 27}{\log_4 \sqrt{3}} - \dfrac{\log_3 32}{\log_3 4}$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

1.3. ÜSTEL, LOGARİTMİK DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Terimler ve Kavramlar

- Üstel Denklem
- Logaritmik Denklem

Üstel Denklemler

Uygun laboratuvar koşullarında bir bakteri türü sayısının her gün iki katına çıktığı gözlemlenmiştir. Ortamda başlangıçta 100 bakteri bulunmaktadır. n. günün sonundaki bakteri sayısı $f(n) = 100 \cdot 2^n$ fonksiyonu ile modellenmiştir. Örneğin 5. günün sonunda bakteri sayısının $f(5) = 100 \cdot 2^5 = 3200$ olduğu gözlemlenmiştir.

Buna göre kaç gün sonra bakteri sayısının 25 600 olacağını bulabilir misiniz?

Bilgi

Tabanı 1 den farklı pozitif gerçek sayı olan ve içerisinde bilinmeyeni üs olarak bulunduran denklemlere **üstel denklem** denir.

Örneğin $7^{3x} = 9$, $4^x - 2^x - 12 = 0$, $e^{2x} - e^x - 6 = 0$ ve $e^{x+1} = 3$ gibi denklemler üstel denklemdir. Bu tür denklemlerin çözüm kümesinin bulunmasında üstel ve logaritmik fonksiyonların özellikleri kullanılır.

1. ÖRNEK

Aşağıda verilen üstel denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözümünü bulunuz.

a) $4^{x-1} = 8^{x+1}$ **b)** $(0,2)^{2x} = 25^{x+4}$ **c)** $3^{5-x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x+3}$

ÇÖZÜM

$a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$ olur.

a) $4^{x-1} = 8^{x+1} \Rightarrow (2^2)^{x-1} = (2^3)^{x+1} \Rightarrow 2^{2x-2} = 2^{3x+3} \Rightarrow 2x - 2 = 3x + 3 \Rightarrow x = -5$ olur.

$Ç = \{-5\}$ bulunur.

b) $(0,2)^{2x} = 25^{x+4}$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} = (5^2)^{x+4}$

$(5^{-1})^{2x} = 5^{2x+8} \Rightarrow 5^{-2x} = 5^{2x+8} \Rightarrow -2x = 2x + 8 \Rightarrow 4x = -8 \Rightarrow x = -2$ olur.

$Ç = \{-2\}$ bulunur.

c) $3^{5-x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x+3}$

$3^{5-x} = (3^{-2})^{x+3} \Rightarrow 3^{5-x} = 3^{-2x-6} \Rightarrow 5 - x = -2x - 6 \Rightarrow x = -11$ olur.

$Ç = \{-11\}$ bulunur.

2. ÖRNEK

Aşağıdaki üstel denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözümünü bulunuz.

a) $3^{x+1} = 2$

b) $e^{2x} = 3$

ÇÖZÜM

Eşitliğin her iki tarafının 3 tabanında logaritması alınırsa

a) $3^{x+1} = 2 \Rightarrow \log_3 3^{x+1} = \log_3 2$

$\Rightarrow x + 1 = \log_3 2$

$\Rightarrow x = -1 + \log_3 2$ olur.

$Ç = \{-1 + \log_3 2\}$ bulunur.

Eşitliğin her iki tarafının e tabanında logaritması alınırsa

b) $e^{2x} = 3 \Rightarrow \ln e^{2x} = \ln 3$

$\Rightarrow 2x = \ln 3$

$\Rightarrow x = \dfrac{\ln 3}{2}$ olur.

$Ç = \left\{\dfrac{\ln 3}{2}\right\}$ bulunur.

3. ÖRNEK

Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözümünü bulunuz.

a) $2^{2x} - 2^x - 2 = 0$

b) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$

ÇÖZÜM

a) $2^{2x} - 2^x - 2 = 0$ denkleminde $2^x = a$ dönüşümü yapılırsa

$a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a-2)(a+1) = 0 \Rightarrow a_1 = 2$ veya $a_2 = -1$ olur.

Buradan $2^x = 2$ veya $2^x = -1$ bulunur.

$2^x = 2 \Rightarrow x = 1$ olduğundan $Ç_1 = \{1\}$ olur.

$2^x > 0$ olduğundan $2^x = -1 \Rightarrow Ç_2 = \{\ \}$ bulunur.

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 = \{1\}$ olur.

b) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$ denkleminde $e^x = a$ dönüşümü yapılırsa

$a^2 - 5a + 6 = 0 \Rightarrow (a-2)(a-3) = 0 \Rightarrow a_1 = 2$ veya $a_2 = 3$ olur.

$e^x = 2 \Rightarrow \ln e^x = \ln 2 \Rightarrow x = \ln 2 \Rightarrow Ç_1 = \{\ln 2\}$ ve

$e^x = 3 \Rightarrow \ln e^x = \ln 3 \Rightarrow x = \ln 3 \Rightarrow Ç_2 = \{\ln 3\}$ bulunur.

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 = \{\ln 2, \ln 3\}$ olur.

4. ÖRNEK

$18 \cdot 4^x - 35 \cdot 6^x + 12 \cdot 9^x = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $5^{x_1 \cdot x_2}$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2^x = a$ ve $3^x = b$ olsun.

Bu durumda $18 \cdot 2^{2x} - 35 \cdot 2^x \cdot 3^x + 12 \cdot 3^{2x} = 0$ olur.

$18a^2 - 35ab + 12b^2 = 0 \Rightarrow (2a - 3b) \cdot (9a - 4b) = 0$

$2a - 3b = 0 \Rightarrow 2a = 3b$ veya $9a - 4b = 0 \Rightarrow 9a = 4b$

$\Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{2}$ $\qquad$ $\Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{9}$

$\Rightarrow \dfrac{2^x}{3^x} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{3}{2}$ $\qquad$ $\Rightarrow \dfrac{2^x}{3^x} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{4}{9}$

$\Rightarrow x_1 = -1$ $\qquad$ $\Rightarrow x_2 = 2$ olur.

$5^{x_1 \cdot x_2} = 5^{(-1) \cdot 2} = 5^{-2} = \dfrac{1}{25}$ bulunur.

5. ÖRNEK

Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözümünü bulunuz.

a) $x \cdot e^x + 4e^x = 0$

b) $x^2 \cdot 4^x - x^2 \cdot 2^x - 4^x + 2^x = 0$

ÇÖZÜM

a) $x \cdot e^x + 4e^x = 0 \Rightarrow e^x(x + 4) = 0 \Rightarrow e^x = 0$ veya $x + 4 = 0$ olur.

$e^x > 0$ olduğundan $e^x = 0 \Rightarrow Ç_1 = \{\ \}$ ve $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow Ç_2 = \{-4\}$ bulunur.

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 = \{-4\}$ olur.

b) $x^2 \cdot 4^x - x^2 \cdot 2^x - 4^x + 2^x = 0$ denklemi 4^x ve -2^x ortak parantezlerine alınarak çarpanlarına ayrılırsa $4^x \cdot (x^2 - 1) - 2^x \cdot (x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(4^x - 2^x) = 0$ elde edilir.

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1$ veya $4^x - 2^x = 0$ denkleminde

$2^x = a$ dönüşümü yapılarak

$4^x - 2^x = 0 \Rightarrow 2^{2x} - 2^x = 0 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a - 1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$ veya $a_2 = 1$ bulunur.

$2^x = 0 \Rightarrow Ç_1 = \{\ \}$

$2^x = 1 \Rightarrow x_3 = 0$ olur.

$Ç = \{-1,\ 0,\ 1\}$ bulunur.

6. ÖRNEK

Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözümünü bulunuz.

a) $5^{x-2} = 2^{x+1}$

b) $3^{x+1} = e^{2x}$

ÇÖZÜM

a)

$$5^{x-2} = 2^{x+1}$$

$$\log 5^{x-2} = \log 2^{x+1}$$

Eşitliğin her iki tarafının 10 tabanında logaritması alınırsa

$$(x-2)\log 5 = (x+1)\log 2$$

$$x\log 5 - 2\log 5 = x\log 2 + \log 2$$

$$x\log 5 - x\log 2 = 2\log 5 + \log 2$$

$$x(\log 5 - \log 2) = \log 25 + \log 2$$

$$x\log\frac{5}{2} = \log 50 \Rightarrow x = \frac{\log 50}{\log\frac{5}{2}} = \log_{\frac{5}{2}} 50 \text{ olur.}$$

$Ç = \left\{\log_{\frac{5}{2}} 50\right\}$ bulunur.

b)

$$3^{x+1} = e^{2x}$$

$$\ln 3^{x+1} = \ln e^{2x}$$

Eşitliğin her iki tarafının e tabanında logaritması alınırsa

$$(x+1)\ln 3 = 2x$$

$$x\ln 3 + \ln 3 = 2x$$

$$\ln 3 = 2x - x\ln 3$$

$$\ln 3 = x(2 - \ln 3) \Rightarrow x = \frac{\ln 3}{2 - \ln 3} \text{ olur.}$$

$Ç = \left\{\frac{\ln 3}{2 - \ln 3}\right\}$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 22 — Bireysel Çalışma

Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözümünü bulunuz.

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+2}$ **b)** $3^x - 2 \cdot 3^{-x} = 1$ **c)** $x^2e^{2x} - 6xe^{2x} + 9e^{2x} = 0$

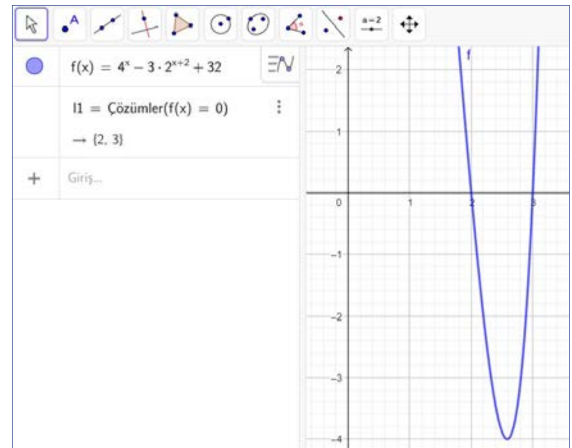
Ders İçi Uygulama 23 — Teknoloji

Dinamik matematik programı kullanarak $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözümünü bulmak için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. YOL:

1. Adım: Giriş kısmına **4^x–3.2^{x+2}+32=0** yazılarak $f(x) = 4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32$ şeklinde verilen f fonksiyonunun grafiği çizilir.

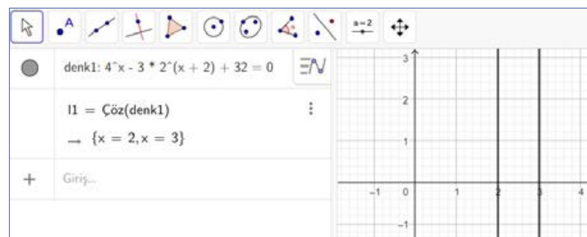
2. Adım: Giriş kısmına **Çözümler(f(x)=0)** yazılarak $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32 = 0$ denkleminin çözüm kümesi bulunur.



2. YOL:

1. Adım: Giriş kısmına **4^x–3.2^{x+2}+32=0** yazılarak denk1: 4 ^ x – 3 * 2 ^ (x + 2) + 32 = 0 denklemi oluşturulur.

2. Adım: Giriş kısmına **Çöz(denk1)** yazılarak $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32 = 0$ denkleminin çözüm kümesi bulunur.



Dinamik matematik programı kullanarak $(3^x - 1)^2 - 6 \cdot 3^x + 14 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ALIŞTIRMALAR 1.4

1. $2^a = x$ **ve** $5^a = y$ **olduğuna göre** 200^a **ifadesinin x ve y türünden değerini bulunuz.**

2. $32^x = 4$ **olduğuna göre x değerini bulunuz.**

3. $2^{2x-1} = 5^{x+2}$ **olduğuna göre** $\left(\frac{4}{5}\right)^x$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

4. $4^{2-x} = 5$ **olduğuna göre x değerini bulunuz.**

5. $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ **olmak üzere**

$$\frac{\log_5 5^{x+1} + \log_2 2^{x+3}}{\log_x x^2 + \log_5 5^x}$$

ifadesinin değerini bulunuz.

6. $2^x = 5^{x+1}$ **olduğuna göre x değerini bulunuz.**

7. $x = 10^{\cos t}$ **ve** $y = 10^{\sin t}$ **olduğuna göre x ile y arasındaki bağıntıyı bulunuz.**

8. $2^x = 4^x - 2$ **olduğuna göre x değerini bulunuz.**

9. $e^x + \frac{8}{e^x} = 6$ **denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözümünü bulunuz.**

10. $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = \frac{7}{16}$ **olduğuna göre x değerini bulunuz.**

11. $9^x - 3^x = 6$ **denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözümünü bulunuz.**

12. $7^{\frac{\log_5(2x-1)}{\log_5 7}} = 5$ **olduğuna göre** $3^{\log_x 5}$ **değerini bulunuz.**

13. $3^{2-\log_3(2x)} = 2x$ **denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözümünü bulunuz.**

14. Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözümünü bulunuz.

a) $3^{2x-1} = 1$
b) $3^{1-2x} = 4$
c) $(\sqrt{3})^x = 10$
ç) $2e^{\frac{x}{5}} = 3$

15. Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözümünü bulunuz.

a) $e^{2x} - 5e^x - 6 = 0$
b) $2^{4x} - 2^{2x} - 6 = 0$
c) $e^{2x} + (e+2)e^x + 2e = 0$

16. $x^2 \cdot 3^x - 2x \cdot 3^x - 3^{x+1} = 0$ **denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözümünü bulunuz.**

17. $2^a = 3^b = 5^c$ **olduğuna göre** $4^{\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)}$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

18. $e^{2x} + 3e^x + 7 = 4 \cdot e^x + 13$ **denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözümünü bulunuz.**

19. $2^{2x-a} + 2^x - 6 = 0$ **denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözümü** $\{2\}$ **olduğuna göre a değerini bulunuz.**

20. $e^{2x} = a \cdot e^x + 4$ **denkleminin kökü** $\ln 4$ **olduğuna göre** $\log_a 9$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

Logaritmik Denklemler

Bilgi

İçerisinde bilinmeyenin logaritmasını bulunduran denklemlere **logaritmik denklem** denir.

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $b \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ ve $g(x) > 0$ olmak üzere $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $\log_a f(x) = b$ ve $b \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ ve $g(x) \neq 1$ olmak üzere $\log_{g(x)} f(x) = b$ şeklindeki denklemler logaritmik denklemdir.

Logaritmik denklemlerin çözüm kümeleri bulunurken üstel veya logaritmik fonksiyonların özellikleri kullanılır.

I. Logaritmik denklem $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ biçiminde ise $f(x) = g(x)$ olur. Bu denklemde $f(x) > 0$ ve $g(x) > 0$ olmalıdır.

II. $f(x) > 0$ olmak üzere $\log_a f(x) = b$ denkleminin çözüm kümesi bulunurken $a^b = f(x)$ biçiminde denkleme dönüştürülür ve denklem çözüldükten sonra f fonksiyonunu pozitif yapan değerler çözüm kümesine dâhil edilir.

III. $\log_{g(x)} f(x) = b$ denkleminin çözüm kümesi bulunurken $f(x) = g(x)^b$ biçiminde denkleme dönüştürülür. $b \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ ve $g(x) \neq 1$ olacak biçimde çözüm kümesi bulunur.

7. ÖRNEK

Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

a) $\log_2(5x + 2) = 5$
b) $\log_6(x - 3) + \log_6(x + 2) = 1$
c) $\log_3(x + 2) - \log_3(x + 1) + \log_3 x = \log_3(x + 3) - \log_3 2$

ÇÖZÜM

a) $\log_2(5x + 2) = 5 \Rightarrow 5x + 2 = 2^5 \Rightarrow 5x + 2 = 32 \Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow x = 6$ olur.

Logaritma fonksiyonunun tanımı gereği

$5x + 2 > 0 \Rightarrow 5x > -2 \Rightarrow x > -\frac{2}{5}$ olmalıdır.

$6 > -\frac{2}{5}$ olduğundan $Ç = \{6\}$ olur.

b) $\log_6(x - 3) + \log_6(x + 2) = 1 \Rightarrow \log_6[(x - 3)(x + 2)] = \log_6 6$

$\Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 6$

$\Rightarrow x^2 - x - 6 - 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - x - 12 = 0$

$\Rightarrow (x - 4)(x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 4$ veya $x_2 = -3$ bulunur.

Logaritma fonksiyonunun tanımı gereği $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$ ve $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$ olmalıdır.
$x = -3$ için denklemdeki $\log_6(x - 3)$ ifadesi tanımsız olacağından $Ç = \{4\}$ bulunur.

c) $\log_3(x+2) - \log_3(x+1) + \log_3 x = \log_3(x+3) - \log_3 2$

$$\log_3\left[\frac{x(x+2)}{x+1}\right] = \log_3\left(\frac{x+3}{2}\right)$$

$$\frac{x(x+2)}{x+1} = \frac{x+3}{2}$$

$$2x(x+2) = (x+1)(x+3)$$

$$2x^2 + 4x = x^2 + 4x + 3$$

$$x^2 = 3 \Rightarrow x = \mp\sqrt{3} \text{ olur.}$$

Logaritma fonksiyonunun tanımı gereği $x+2>0$, $x+1>0$, $x>0$ ve $x+3>0$ olmalıdır. $x=-\sqrt{3}$ için $\log_3 x$ ve $\log_3(x+1)$ ifadeleri tanımsız olur. Bu durumda $Ç = \{\sqrt{3}\}$ bulunur.

8. ÖRNEK

$\sqrt{\ln x} = \ln\sqrt{x}$ denklemini sağlayan x değerlerinin çarpımını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sqrt{\ln x} = \ln\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{\ln x} = \ln x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{\ln x} = \frac{1}{2}\ln x$ olur.

$\ln x = a$ olsun. Bu durumda

$$\sqrt{a} = \frac{1}{2}a \Rightarrow a = \frac{a^2}{4} \Rightarrow a^2 = 4a \Rightarrow a^2 - 4a = 0$$

$$\Rightarrow a(a-4) = 0$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ veya } a = 4$$

$$\Rightarrow \ln x = 0 \text{ veya } \ln x = 4$$

$$\Rightarrow x_1 = e^0 = 1 \text{ veya } x_2 = e^4 \text{ olur.}$$

x değerleri denklemi sağladığından $x_1 \cdot x_2 = e^4$ bulunur.

9. ÖRNEK

$x^{\log_5 4} + 4^{\log_5 x} = 32$ denklemini sağlayan x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$x^{\log_5 4} + 4^{\log_5 x} = 32 \Rightarrow 4^{\log_5 x} + 4^{\log_5 x} = 32$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 4^{\log_5 x} = 32$$

$$\Rightarrow 4^{\log_5 x} = 16$$

$$\Rightarrow \log_5 x = 2$$

$$\Rightarrow x = 5^2 = 25 \text{ bulunur.}$$

10. ÖRNEK

$\log_x 3 + \log_x 9 + \log_x 27 + \ldots + \log_x 9^4 = 18$ denklemini sağlayan x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_x 3 + \log_x 9 + \log_x 27 + \ldots + \log_x 9^4 = 18$$

$$\log_x 3 + \log_x 3^2 + \log_x 3^3 + \ldots + \log_x 3^8 = 18$$

$$\log_x 3 + 2\log_x 3 + 3\log_x 3 + \ldots + 8\log_x 3 = 18$$

$$(1+2+3+\ldots+8)\log_x 3 = 18$$

$$36\log_x 3 = 18 \Rightarrow \log_x 3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow x = 9 \text{ bulunur.}$$

11. ÖRNEK

$\log_2(x^2 - 2) = 1$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\log_2(x^2 - 2) = 1$

$x^2 - 2 = 2^1$

$x^2 = 4$ ise

$x_1 = 2$ veya $x_2 = -2$ olur.

Logaritma fonksiyonunun tanımı gereği $x^2 - 2 > 0$ olmalıdır.
Bu eşitsizlik tablo ile çözülürse
$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}$ ve $x_2 = \sqrt{2}$ kökleri bulunur.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 - 2 > 0$	+	o	−	o	+
	Çözüm				Çözüm

Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ olur.
Bulunan $x_1 = 2$ ve $x_2 = -2$ kökleri bu kümenin içinde olduğundan $Ç = \{-2, 2\}$ bulunur.

12. ÖRNEK

$\log(a \cdot b^2) = 5$ ve $\log\left(\frac{b}{a}\right) = 4$ olduğuna göre $\log_a b$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\log(a \cdot b^2) = \log a + 2\log b = 5$

$\log\left(\frac{b}{a}\right) = \log b - \log a = 4$ olur.

$\log a = x$ ve $\log b = y$ olarak alınırsa

$x + 2y = 5$

$-x + y = 4$

denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{array}{rl} & x + 2y = 5 \\ + & -x + y = 4 \\ \hline & 3y = 9 \end{array}$$

$y = 3$ ve $x = -1$ bulunur.

$x = -1 \Rightarrow \log a = -1$

$a = 10^{-1}$

$y = 3 \Rightarrow \log b = 3$

$b = 10^3$ olur.

$\log_a b = \log_{10^{-1}} 10^3 = -3$ bulunur.

13. ÖRNEK

$\log_{(x-3)}(19 - 3x) = 2$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

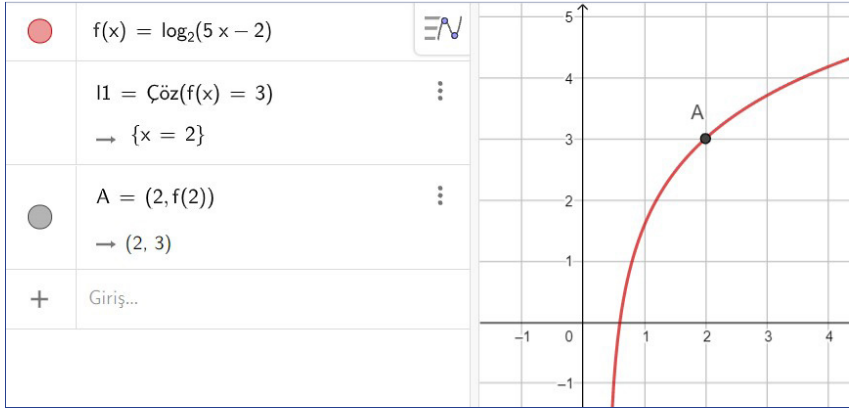
$\log_{(x-3)}(19-3x) = 2 \Rightarrow (x-3)^2 = 19-3x$
$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 19 - 3x$
$\Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$
$\Rightarrow (x-5)(x+2) = 0$ olur.

$x_1 = 5$ ve $x_2 = -2$ bulunur.
Logaritma fonksiyonunun tanımı gereği $19 - 3x > 0$, $x - 3 > 0$ ve $x - 3 \neq 1$ olmalıdır.
$x = -2$ için denklemdeki logaritma fonksiyonu tanımsız olacağından $Ç = \{5\}$ olur.

Ders İçi Uygulama 24 — Teknoloji

Dinamik matematik programı kullanarak $\log_2(5x-2) = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulmak için aşağıdaki adımlar uygulanır:

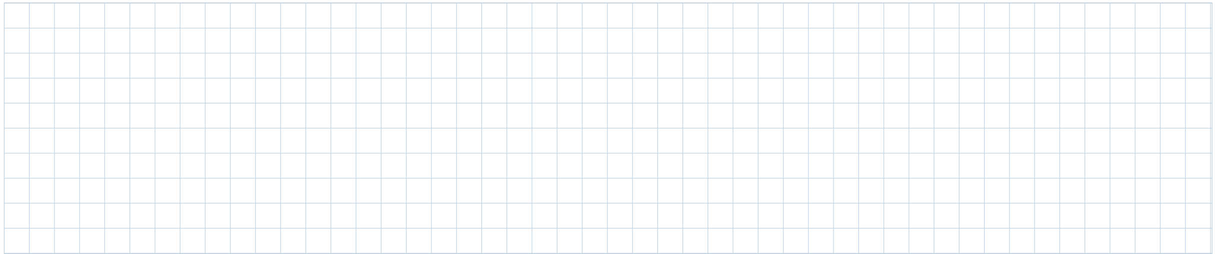
1. Adım: Giriş kısmına **log(2,5x-2)** yazılarak $f(x) = \log_2(5x-2)$ şeklinde verilen f fonksiyonunun grafiği çizilir.
2. Adım: Giriş kısmına **Çöz(f(x)=3)** yazılarak $\log_2(5x-2) = 3$ denkleminin çözüm kümesi bulunur.
3. Adım: Giriş kısmına **(2,f(2))** yazıldığında oluşan $A(2, 3)$ noktasının f fonksiyonunun grafiği üzerinde olduğu görülür.



Dinamik matematik programı kullanarak aşağıdaki logaritmik denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $\log_x 4 = 2$

b) $\log_2 x - \dfrac{4}{\log_2 x} = 0$



1. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $(\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 - 3 = 0$

b) $3^{\log_7 x} + 27^{\log_7 \sqrt[3]{x}} + x^{\log_7 3} = 27$

c) $2x - 8 = 10^{1-\log x}$

ç) $\log_5 x + 3 \cdot \log_x 5 = 4$

d) $\log_3(x^2 - 2x) = 1 + \log_3 5$

2. $\log_x(x+4) + \log_x(x+1) = \log_x(8x+2)$ **ise x değerini bulunuz.**

3. $\log_x(x+12) = 2$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

4. $f(\ln x + 2) = x^2 + 1$ **ise** $f(3)$ **değerini bulunuz.**

5. $\log_x e - 3 = 4 \cdot \ln x$ **denkleminin kökler çarpımını bulunuz.**

6. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ **olmak üzere**

$\log_3(\cot x) + \log_3(\tan x) = \ln(2x - 1)$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

7. $\log_3(3^x - 2) + x - 1 = 0$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

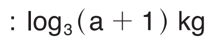
8. $x^{\log_3 x} = 27x^2$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

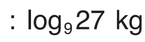
9. $\log_9\left(\frac{1}{x}\right) + \log_3\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right) = 2$ **olduğuna göre** $x \cdot y$ **değerini bulunuz.**

10. $x^{1+\log_2 x} - 2x = 0$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

Ders İçi Uygulama 25 — Bireysel Çalışma

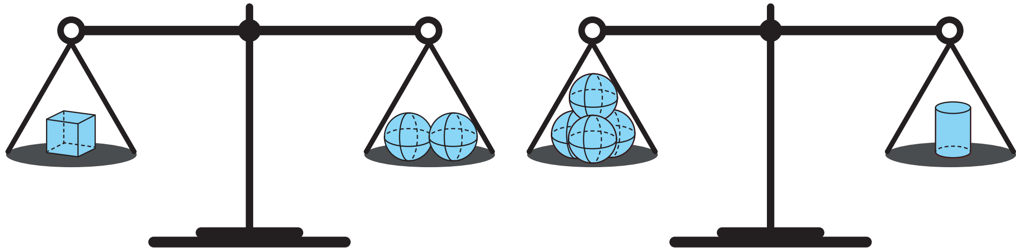
1. Küp, küre ve silindir şeklinde homojen, düzgün üç farklı cismin kütleleri a, b $\in \mathbb{R}$ olmak üzere


: $\log_3(a+1)$ kg


: $\log_9 27$ kg

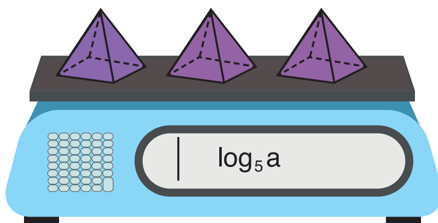

: $\log_{27}(b^3 - 37)^6$ kg olarak verilmiştir.

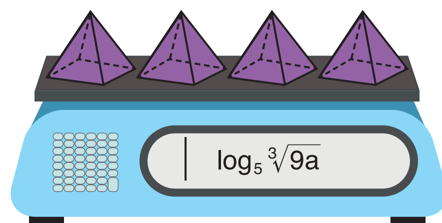
Bu ağırlıklar kullanılarak eşit kollu terazide aşağıdaki gibi denge durumları oluşturulmuştur.



Buna göre a + b değerini bulunuz.

2.





Yukarıdaki biçimde verilen özdeş, içi dolu piramitlerin dijital terazideki kütleleri verilmiştir.
Buna göre piramitlerden bir tanesinin kütlesini bulunuz.

Üstel Eşitsizlikler

Başlangıçta 10 arıdan oluşan bir yaban arısı kolonisinin sayısı her hafta önceki haftaya göre ikiye katlanmaktadır. Bu durumda n hafta sonunda kolonideki arı sayısını veren fonksiyon $f(n) = 10 \cdot 2^n$ biçiminde modellenmektedir. Örneğin üç hafta sonra kolonideki arı sayısı $f(3) = 10 \cdot 2^3$ olmaktadır.

Buna göre

a) Kolonideki arı sayısı 640 tan az ise n nin alabileceği değerleri bulabilir misiniz?

b) Kolonideki arı sayısı 2500 ile 2600 aralığında iken koloninin kaçıncı hafta içerisinde olduğunu hesaplayabilir misiniz?

Bilgi

$a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere içerisinde bilinmeyen bulunduran $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$, $a^{f(x)} > b$, $a^{f(x)} < b$, $a^{f(x)} \geq b$ ve $a^{f(x)} \leq b$ biçimindeki eşitsizliklere **üstel eşitsizlikler** denir.

$a > 1$ için

$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x)$

$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x)$ olur.

$0 < a < 1$ için

$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x)$

$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x)$ olur.

14. ÖRNEK

Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+2x} \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{x-18}$ **b)** $e^{3x-x^2} > e^{x^2+7x}$

ÇÖZÜM

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+2x} \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{x-18} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+2x} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{18-x}$

$0 < \frac{2}{5} < 1$ olduğundan eşitsizlik yön değiştirir.

$\Rightarrow x^2 + 2x \geq 18 - x \Rightarrow x^2 + 3x - 18 \geq 0 \Rightarrow (x+6)(x-3) \geq 0$ olur.

$(x+6)(x-3) = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = -6$ ve $x_2 = 3$ olur.

	$-\infty$	-6		3	$+\infty$
$x^2 + 3x - 18 \geq 0$	+ (Çözüm)	●	−	●	+ (Çözüm)

x_2 ● $x_2 \in Ç$

$Ç = (-\infty, -6] \cup [3, +\infty)$ bulunur.

b) $e^{3x-x^2} > e^{x^2+7x}$

$e > 1$ olduğundan eşitsizlik yön değiştirmez.

$3x - x^2 > x^2 + 7x \Rightarrow 0 > 2x^2 + 4x \Rightarrow 0 > 2x(x+2)$ olur.

$2x^2 + 4x = 0 \Rightarrow 2x(x+2) = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = -2$ ve $x_2 = 0$ olur.

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$2x^2 + 4x < 0$	+	○	− (Çözüm)	○	+

$Ç = (-2, 0)$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 26 — Bireysel Çalışma

Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $27^{2x-2} < 9^{x+1}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-1} > \left(\frac{1}{81}\right)^{x+1}$

Logaritmik Eşitsizlikler

Bir film şirketi vizyona yeni girecek filminin x hafta sonundaki gişe hasılatını $f(x) = 50 \cdot \log_2(x+1) + 100$ milyon TL olarak hesaplamıştır.

Buna göre

a) Filmin gişe hasılatı 250 milyon TL'den az olduğunda filmin en çok kaç haftadır gösterimde olduğunu bulabilir misiniz?

b) Filmin gişe hasılatı 290 ile 310 milyon TL aralığında iken filmin kaçıncı haftada gösterimde olduğunu hesaplayabilir misiniz?

Bilgi

$a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$ ve $g(x) > 0$ olmak üzere bilinmeyenin logaritmasını bulunduran $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$, $\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$, $\log_a f(x) > b$, $\log_a f(x) < b$, $\log_a f(x) \geq b$, $\log_a f(x) \leq b$ biçimindeki eşitsizliklere **logaritmik eşitsizlikler** denir.

$a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$ ve $g(x) > 0$ olmak üzere

$a > 1$ için

$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \geq g(x)$

$\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \leq g(x)$ olur.

$0 < a < 1$ için

$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \leq g(x)$

$\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \geq g(x)$ olur.

15. ÖRNEK

$\log_2(3x - 10) < 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2 > 1$ olduğundan eşitsizlik yön değiştirmez.

$\log_2(3x-10) < 5 \Rightarrow \log_2(3x-10) < \log_2 2^5 \Rightarrow 3x - 10 < 2^5 \Rightarrow 3x < 42 \Rightarrow x < 14$ ve logaritma fonksiyonunun tanımı gereği $3x - 10 > 0 \Rightarrow 3x > 10 \Rightarrow x > \frac{10}{3}$ olduğundan $Ç = \left(\frac{10}{3}, 14\right)$ bulunur.

16. ÖRNEK

$\log_3(x^2 + 2x) < 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\log_3(x^2 + 2x) < 1 \Rightarrow \log_3(x^2 + 2x) < \log_3 3 \Rightarrow x^2 + 2x < 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 < 0$ olur.

Logaritma fonksiyonunun tanımı gereği $x^2 + 2x > 0$ olmalıdır.

3 > 1 olduğundan eşitsizlik yön değiştirmez.

$x^2 + 2x - 3 < 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 3) < 0$

$x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x(x + 2) > 0$

eşitsizlik sisteminin ortak çözüm kümesini bulmak için işaret tablosu yapılırsa

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ veya $x_2 = -3$

$x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ veya $x_2 = -2$ olur.

x	$-\infty$	-3	-2	0	1	$+\infty$
$x^2 + 2x - 3 < 0$	+	−	−	−	+	
$x^2 + 2x > 0$	+	+	−	+	+	
		Çözüm		Çözüm		

Ç = $(-3, -2) \cup (0, 1)$ bulunur.

17. ÖRNEK

$\log_3(x + 2) - \log_3(1 - x) < 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\log_3(x + 2) - \log_3(1 - x) < 2 \Rightarrow \log_3\left(\frac{x+2}{1-x}\right) < 2 \Rightarrow \log_3\left(\frac{x+2}{1-x}\right) < \log_3 3^2 \Rightarrow \frac{x+2}{1-x} < 3^2$ olur.

$\left(\frac{x+2}{1-x}\right) - 9 < 0 \Rightarrow \frac{x + 2 - 9 + 9x}{1 - x} < 0 \Rightarrow \frac{10x - 7}{1 - x} < 0$ eşitsizliği elde edilir. Ayrıca logaritma fonksiyonunun tanımı gereği $x + 2 > 0$ ve $1 - x > 0$ olmalıdır. Bulunan eşitsizlik sistemi tablo yardımıyla çözülürse

$10x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{10}$

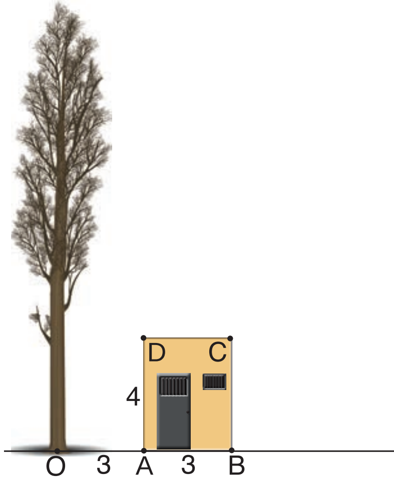
$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

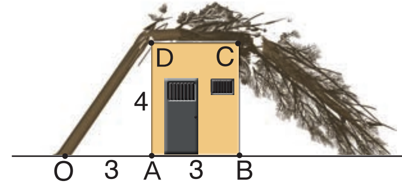
x	$-\infty$	-2	$\frac{7}{10}$	1	$+\infty$
$\frac{10x-7}{1-x} < 0$	−	−	+	−	
$x + 2 > 0$	−	+	+	+	
$1 - x > 0$	+	+	+	−	
		Çözüm			

Ç = $\left(-2, \frac{7}{10}\right)$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 27 — Bireysel Çalışma



Görsel 1



Görsel 2

Görsel 1'de bir kavak ağacı ile önden görünümü dikdörtgen biçiminde olan bir depo resmedilmiştir.

Fırtınalı bir havada yıkılan kavak ağacı Görsel 2'deki gibi önden görünümü dikdörtgen şeklindeki deponun üzerindeki D ve C noktalarından kırılarak uç noktası yere değecek şekilde 3 parçaya ayrılmıştır. $|OA| = |AB| = 3$ metre ve $|AD| = 4$ metredir.

Kavak ağacının boyu $\log_3(6-a)^{12}$ metre olduğuna göre a nın <u>en küçük</u> pozitif tam sayı değerini bulunuz.



18. ÖRNEK

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4) \geq \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$0 < \frac{1}{2} < 1$ olduğundan eşitsizlik yön değiştirir.

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4) \geq \log_{\frac{1}{2}}(x+2) \Rightarrow x^2-4 \leq x+2 \Rightarrow x^2-x-6 \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) \leq 0$ elde edilir.

Logaritma fonksiyonunun tanımı gereği $x^2-4>0$ ve $x+2>0$ olmalıdır.
Eşitsizlik sisteminin ortak çözümünü bulmak için işaret tablosu yapılırsa $Ç = (2, 3]$ bulunur.

x	$-\infty$		-2		2		3		$+\infty$
$(x-3)(x+2) \leq 0$		+	●	−		−	●	+	
$x^2-4>0$		+	○	−	○	+		+	
$x+2>0$		−	○	+		+		+	
						Çözüm			

19. ÖRNEK

$\log_2(\log_4(3x+1)) < 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_2(\log_4(3x+1)) < 1$$
$$\log_2(\log_4(3x+1)) < \log_2 2$$
$$\log_4(3x+1) < 2$$
$$\log_4(3x+1) < \log_4 4^2$$
$$3x+1 < 16$$
$$3x < 15$$
$x < 5$ bulunur.

Logaritma fonksiyonunun tanımı gereği $\log_4(3x+1) > 0$ ve $3x+1 > 0$ olmalıdır.

$\log_4(3x+1) > 0$ ve $3x+1 > 0$

$\log_4(3x+1) > \log_4 1$ $\quad$ $3x > -1$

$3x+1 > 1$ $\quad$ $x > -\frac{1}{3}$ olur.

$3x > 0$

$x > 0$

$x < 5$, $x > 0$ ve $x > -\frac{1}{3}$ olduğundan $Ç = (0, 5)$ bulunur.

20. ÖRNEK

Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $3^{2x} > 4$ **b)** $e^{x+1} < 2$ **c)** $(\log_4 x)^2 - 9 \le 0$

ÇÖZÜM

a) $3^{2x} > 4 \Rightarrow \log_3 3^{2x} > \log_3 4 \Rightarrow 2x > \log_3 4 \Rightarrow x > \frac{\log_3 4}{2} \Rightarrow x > \frac{\log_3 4}{\log_3 9} \Rightarrow x > \log_9 4$ olur.

$Ç = (\log_9 4, +\infty)$ bulunur.

b) $e^{x+1} < 2 \Rightarrow \ln e^{x+1} < \ln 2 \Rightarrow x+1 < \ln 2 \Rightarrow x < \ln 2 - 1 \Rightarrow x < \ln 2 - \ln e \Rightarrow x < \ln\frac{2}{e}$ olur.

$Ç = (-\infty, \ln\frac{2}{e})$ bulunur.

c) $(\log_4 x)^2 - 9 \le 0$ eşitsizliğinde $\log_4 x = a$ alınırsa

$(\log_4 x)^2 - 9 \le 0 \Rightarrow a^2 - 9 \le 0 \Rightarrow (a-3)(a+3) \le 0$ olur.

Kökler $(a-3)(a+3) = 0 \Rightarrow a_1 = 3$ ve $a_2 = -3$ olur.

a	$-\infty$	-3		3	$+\infty$
$(a-3)(a+3) \le 0$	$+$	●	$-$	●	$+$
			Çözüm		

$-3 \le a \le 3$ bulunur.

$-3 \le \log_4 x \le 3 \Rightarrow \log_4 4^{-3} \le \log_4 x \le \log_4 4^3 \Rightarrow \frac{1}{64} \le x \le 64$ (I)

$\log_4 x$ fonksiyonunun tanımı gereği $x > 0$ olmalıdır. (II)

(I) ve (II) eşitsizliklerinin ortak çözümü $Ç = \left[\frac{1}{64}, 64\right]$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 28 — Bireysel Çalışma

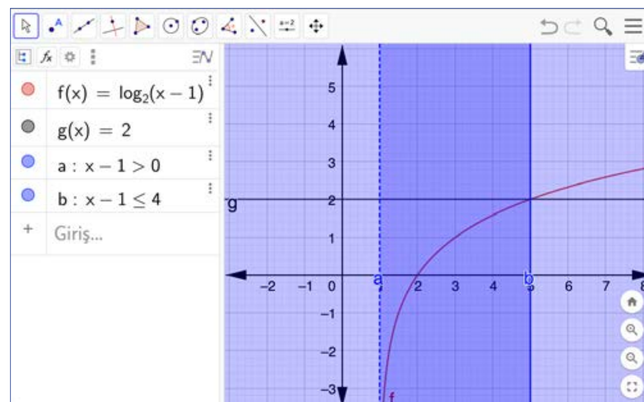
Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $2^{x+2} < 5$ **b)** $\log_5(x+2) + \log_5(4-x) < 1$ **c)** $0 < \log_2(x^2+4) < 3$

Ders İçi Uygulama 29 — Teknoloji

Dinamik matematik programında $\log_2(x-1) \leq 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulmak için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. Adım: Giriş kısmına **log(2,x-1)** yazılarak $f(x) = \log_2(x-1)$ ile tanımlanan f fonksiyonunun grafiği çizilir.
2. Adım : Giriş kısmına **g(x)=2** yazılarak g fonksiyonunun grafiği çizilir.
3. Adım : Giriş kısmına **x-1>0** yazılarak $f(x) = \log_2(x-1)$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun tanımlı olduğu aralık bulunur.
4. Adım : Giriş kısmına **x-1≤4** yazılarak $\log_2(x-1) \leq 2$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin aralığı bulunur.
5.Adım : Aşağıda oluşan grafikte hem $\log_2(x-1) \leq 2$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür hem de logaritma fonksiyonunun tanımlı olduğu aralık belirlenir.



$\log_2(x-1) \leq 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $(1,\ 5]$ dır.

Dinamik matematik programını kullanarak aşağıda verilen eşitsizliklerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $\log_2(2x-4) \geq 3$ **b)** $\log_2(x+4) < \log_2(2-x)$

ALIŞTIRMALAR 1.6

1. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $5^{x-1} < 25^{x+1}$
b) $a^2 < a$ olmak üzere $a^{x-5} \geq a^{2x+1}$
c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+3x} > \left(\frac{9}{4}\right)^{1-x}$
ç) $(\sqrt{e})^{2x+3} > (\sqrt[3]{e^2})^{6x-2}$

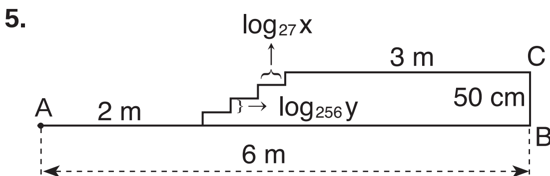
2. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $\log_2(x-3) + \log_2(x+3) \leq 4$
b) $\log_{\frac{1}{9}}(x^2 - 4x + 4) < -2$
c) $\log_5(x+4) - \log_5(2x-1) > -1$

3. $\log(x+5) + \log_{0,1}(x+1) \leq \log(x-1)$ **eşitsizliğini sağlayan <u>en küçük</u> tam sayı değerini bulunuz.**

4. $1 < \log_3(x^2 - 3x - 1) < 3$ **eşitsizliğini sağlayan kaç farklı tam sayı değeri olduğunu bulunuz.**

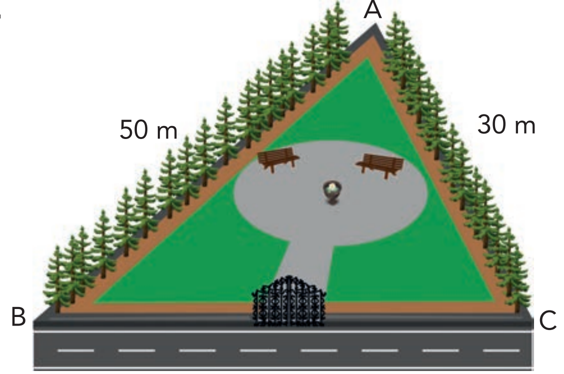
5.



Şekilde özdeş dört basamaktan oluşan bir merdivenin yandan görünümü çizilmiştir.

$|AB| = 6$ m, $|BC| = 50$ cm, **her bir basamağın genişliği** $\log_{27}x$ **m ve yüksekliği** $\log_{256}y$ **m ise** $x + y$ **değerini bulunuz.**

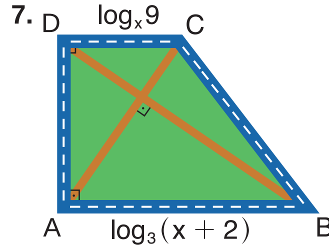
6.



Yukarıdaki görselde üçgen şeklindeki bir parkın iki kenar uzunluğu verilmiştir. Parkın A köşesinde bulunan Ali'nin B köşesinde bulunan Buket'e uzaklığı 50 metre, C köşesinde bulunan Ceylin'e uzaklığı 30 metredir. Buket ile Ceylin arasındaki uzaklık $\log_2(5x-1)^{10}$ metredir.

Buna göre x in alacağı kaç farklı tam sayı değeri olduğunu bulunuz.

7.



Yukarıdaki şekilde bir yeşil alanda bulunan yürüyüş ve bisiklet yolları verilmiştir. Park içerisindeki yürüyüş yolları birbirine dik ve çevresindeki bisiklet yolu dik yamuk olacak şekilde modellenmiştir.
$[AC] \perp [BD]$
$|AB| = \log_3(x+2)$ birim
$|CD| = \log_x 9$ birimdir.

$[AD]$ **bisiklet yolu 2 birimden büyük olduğuna göre x in değer aralığını bulunuz.**

Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar ile Modelleme

Nüfus artışı, yatırımdaki paranın artışı, fosil yaşı, bakteri popülasyonu, radyoaktif bozunma, deprem, ısı yayılımı gibi pek çok durum üstel ve logaritmik fonksiyonlar ile modellenebilir.

Başlangıç değeri n, geçen süre t ve değişim miktarı y olmak üzere $y = n \cdot e^{kt}$ bağıntısı **üstel değişim bağıntısı** olarak adlandırılır. **k değişim oranı sabiti** olmak üzere bağıntı $k > 0$ ise **üstel büyüme**, $k < 0$ ise **üstel bozunma** olarak adlandırılır.

Ders İçi Uygulama 30 — Teknoloji

Bakteri Popülasyonu

Uygun bir ortamda başlangıçtaki bakteri sayısı n, çoğalma sabiti k olmak üzere t saat sonundaki bakteri sayısı $y = f(t) = n \cdot e^{kt}$ olarak modelleniyor:

Başlangıçta 20 adet bakteri bulunan bir kapta, 6 saatin sonunda 360 adet bakteri olduğuna göre aynı kapta 10 saatin sonunda yaklaşık kaç adet bakteri bulunacağını hesaplamak için aşağıdaki adımlar uygulanır.

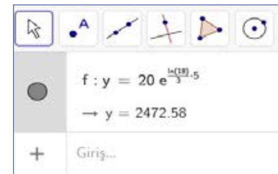
1. Adım: Verilen $n = 20$, $t = 6$ ve $y = 360$ değerleri $y = f(t) = n \cdot e^{kt}$ bağıntısında yerine yazılırsa k büyüme sabiti olmak üzere

$$y = n \cdot e^{kt}$$
$$360 = 20 \cdot e^{6k}$$
$$18 = e^{6k}$$
$$\ln 18 = 6k$$
$$k = \frac{\ln 18}{6} \text{ bulunur.}$$

2. Adım: $n = 20$, $t = 10$ ve $k = \frac{\ln 18}{6}$ değerleri $y = f(t) = n \cdot e^{kt}$ bağıntısında yerine yazılırsa 10 saatin sonunda kaptaki yaklaşık bakteri sayısı

$$y = n \cdot e^{kt}$$
$$y = 20 \cdot e^{\frac{\ln 18}{\cancel{6}} \cdot \cancel{10}}$$
$$y = 20 \cdot e^{\frac{\ln 18}{3} \cdot 5} \text{ olur.}$$

3. Adım: Dinamik matematik programının giriş kısmına $y = 20 \cdot e^{\frac{\ln 18}{3} \cdot 5}$ yazılırsa yaklaşık bakteri sayısı $y \cong 2.473$ olması beklenir.



Başlangıçtaki bakteri sayısı 50 adet olan bir kapta 2 günün sonunda bakteri sayısı 1200 adet olduğuna göre bu bakterilerin çoğalma sabitini dinamik matematik programı veya bilimsel hesap makinesi kullanarak bulunuz.



21. ÖRNEK



Radyoaktif Bozunma

Plütonyum, bilinen en zararlı, en radyoaktif elementlerden biridir. Japonya'ya atılan atom bombalarının ikincisinde izine rastlanan bu elementin kötü amaçlar için kullanıldığında insanlığın felaketi olabileceği görülmüştür.

Radyoaktif bir maddenin yarılanma ömrü, başlangıçtaki ağırlığının yarıya düştüğü ana kadar geçen zamandır. Başlangıç ağırlığı n, bozunma sabiti k, zaman t olmak üzere plütonyumdan t zaman sonra kalan miktar $y = f(t) = ne^{kt}$ fonksiyonu ile modellenmiştir.

Yarılanma ömrü 24 360 yıl olan plütonyum-239 (Pu-239) elementi için üstel bir model oluşturup aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Doğada başlangıçta 120 gram olan Pu-239 elementinin kaç yıl sonra 40 gram kalacağını bulunuz.

b) Doğada başlangıçta 80 gram olan Pu-239 elementinin 1000 yıl sonra kaç gram kalacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) 100 birim Pu-239 elementi 24 360 yıl sonra 50 birime düşer.
Buradan bozunma sabiti yaklaşık

$$y = n \cdot e^{kt}$$
$$50 = 100 \cdot e^{k \cdot 24\,360}$$
$$\frac{1}{2} = e^{24\,360 \cdot k}$$
$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 24\,360 \cdot k$$
$$k = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{24\,360} \cong -2,85 \cdot 10^{-5} \text{ bulunur.}$$
$$y = n \cdot e^{-2,85 \cdot 10^{-5} \cdot t}$$
$$40 = 120 \cdot e^{-2,85.10^{-5} \cdot t}$$
$$\frac{1}{3} = e^{-2,85 \cdot 10^{-5} \cdot t}$$
$$\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -2,85 \cdot 10^{-5} \cdot t$$
$$t = -\frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{2,85 \cdot 10^{-5}} \cong 38\,548 \text{ yıl olur.}$$

b) $f(t) = n \cdot e^{-2,85 \cdot 10^{-5} \cdot t}$

$t = 1000$ için

$f(1000) = 80 \cdot e^{-2,85.10^{-5} \cdot 1000}$

$f(1000) = 80 \cdot e^{-0,0285} \cong 77,75$ gram kalır.

22. ÖRNEK

Karbon-14 Testi

Lolan Güzeli, son yıllarda Doğu Türkistan'da bulunmuş bir Türk prensesine ait olduğu düşünülen mumyadır. Mumyanın 3800 yaşında olduğu tahmin edilmektedir.

Fosillerin yaşını hesaplama yöntemine karbon-14 testi denir. Bir canlının kemiğinde bulunan karbon-14 atomları canlının ölümünden sonra düzenli bozunarak karbon-12 atomlarına dönüşür. Karbon-14 atomunun yarı ömrü yaklaşık 5730 yıldır. Fosilleşmiş kemikteki bu iki cins atomun miktarı ölçülerek yaklaşık fosil yaşı hesaplanabilir. y, karbon-14 miktarının tüm karbon miktarına oranı ve x, fosil yaşı olmak üzere $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}$ eşitliği sağlanmaktadır $(\log 2 \cong 0,3)$.

Fosilleşmiş bir yapraktaki karbon-14 oranı %16 ise bu fosilin yaşını yaklaşık olarak hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$$\frac{16}{100} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}$$

$$\frac{16}{100} = 2^{-\frac{x}{5730}}$$

$$\log_2 \frac{16}{100} = \log_2 2^{-\frac{x}{5730}}$$

$$\log_2 16 - \log_2 100 = -\frac{x}{5730}$$

$$(4 - \log_2 100) \cdot 5730 = -x$$

$$(4 - 2\log_2 10) \cdot 5730 = -x$$

$$\left(4 - 2 \cdot \frac{1}{\log 2}\right) \cdot 5730 = -x$$

$$x \cong 15149 \text{ olur.}$$

Fosilleşmiş yaprak yaklaşık 15 149 yaşındadır.

Ders İçi Uygulama 31 — Bireysel Çalışma

1. 3800 yaşındaki bir mumyanın vücudundaki karbon-14 oranını bilimsel hesap makinesi kulanarak hesaplayınız.

2. %12 karbon-14 içeren bir fosilin yaklaşık kaç yaşında olacağını bilimsel hesap makinesi kulanarak hesaplayınız.

23. ÖRNEK

Nüfus Artışı

Yandaki grafikte bir ülkenin yıllara göre nüfusu; n başlangıçtaki nüfus, k üstel sabit, t zaman olmak üzere $f(t) = n \cdot e^{kt}$ biçiminde üstel değişim bağıntısı ile modellenmiştir.

Buna göre

a) Zamana bağlı nüfusu belirten fonksiyon kuralını bulunuz.

b) 2050 yılında bir ülkenin nüfusunun yaklaşık ne kadar olacağını bulunuz.

Nüfus (Milyon)
f
84,34
64,19
44,99
24,47
O
1960 1980 2000 2020
Yıl

ÇÖZÜM

a) x yılında bir ülkenin nüfusunu veren fonksiyon kuralı $f(x)$ olmak üzere

$f(t) = n \cdot e^{kt}$ üstel değişim bağıntısında

$t = x - 1960$ alınırsa $f(x) = n \cdot e^{k \cdot (x-1960)}$ olur.

$f(2020) = 84,34$ eşitliği kullanılarak k değeri

$$84,34 = 24,47 \cdot e^{k \cdot (2020-1960)}$$

$$\frac{84,34}{24,47} = e^{60k}$$

$$60k = \ln\left(\frac{84,34}{24,47}\right)$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{84,34}{24,47}\right)}{60} \cong 0,0206 \text{ bulunur.}$$

$f(x) = 24,47 \cdot e^{0,0206(x-1960)}$ olur.

b) $f(2050) = 24,47 \cdot e^{0,0206 \cdot (2050-1960)}$

$f(2050) = 24,47 \cdot e^{1,854} \cong 156,58$ olur.

2050 yılında bir ülkenin nüfusunun yaklaşık 156 milyon olması beklenir.

Ders İçi Uygulama 32

Bireysel Çalışma

Yukarıdaki grafiğe göre 2030 yılında bu ülkenin nüfusunun yaklaşık ne kadar olacağını bilimsel hesap makinesi kullanarak hesaplayınız.

24. ÖRNEK

Ekmek İsrafı

Türkiye genelinde bayat ekmeklerin hayvan barınaklarında değerlendirilmesini amaçlayan bir kampanya düzenlenmiştir. Kampanya başlangıcındaki ekmek adedi n, kampanyanın süresi t ay ve üstel çoğalma sabiti k olmak üzere barınaklara ulaştırılan ekmek miktarı $f(t) = n \cdot e^{k \cdot t}$ ile modellenmiştir.

80 000 adet bayat ekmek toplandıktan sonra başlanan kampanyanın 3. ayında barınaklara 100 000 adet bayat ekmek ulaştığına göre

a) Bu kampanyanın üstel çoğalma sabitini hesaplayınız.
b) Kampanyanın 9. ayında barınaklara yaklaşık kaç adet ekmek ulaşacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Kampanya başlangıcındaki ekmek miktarı $n = 80\,000$ ve $t = 3$ ayın sonunda barınaklara ulaşan ekmek miktarı $f(3) = 100\,000$ olduğuna göre

$$f(t) = n \cdot e^{k \cdot t}$$
$$f(3) = 80\,000 \cdot e^{k \cdot 3}$$
$$100\,000 = 80\,000 \cdot e^{k \cdot 3}$$

$$\frac{5}{4} = e^{k \cdot 3} \Rightarrow \ln\left(\frac{5}{4}\right) = \ln e^{3k} \Rightarrow \ln\left(\frac{5}{4}\right) = 3k \Rightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}{3} \text{ olur.}$$

b) $f(t) = 80\,000 \cdot e^{\frac{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}{3} \cdot t}$ ifadesinde $t = 9$ yerine yazılırsa

$$f(9) = 80\,000 \cdot e^{\frac{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}{\cancel{3}} \cdot \cancel{9}}$$
$$f(9) = 80\,000 \cdot e^{\ln\left(\frac{5}{4}\right) 3}$$
$$f(9) \cong 156\,250 \text{ adet bulunur.}$$

Ders İçi Uygulama 33 — Bireysel Çalışma

Bir ilçe belediyesi, 60 000 metreküp kapasiteye sahip atık su arıtma tesisinin kapasitesini 200 000 metreküpe yükseltmek için tesise yeni arıtma havuzları eklemeyi planlıyor. Tesisin havuz inşaatına başlandığı andaki kapasitesi n (m^3), inşaat başladıktan itibaren geçen süre t (yıl) olmak üzere arıtma tesisinin kapasitesi $f(t) = n \cdot e^{0,4 \cdot t}$ şeklinde tanımlanan f üstel fonksiyonu ile modellenmektedir.

Belediyenin hedeflediği kapasiteye kaçıncı yıl içerisinde ulaşacağını bilimsel hesap makinesi kullanarak bulunuz.

25. ÖRNEK

Esra Hanım aile bütçesine katkı sağlamak için ocak ayı maaşından 100 TL tasarruf ederek her ay bir önceki aydan %10 fazla tasarruf etmeyi planlamıştır.

Buna göre

a) Esra Hanım'ın n. ayda tasarruf ettiği parayı gösteren bir fonksiyon oluşturunuz.

b) Esra Hanım'ın ilk 4 ayda toplam kaç TL tasarruf ettiğini bilimsel hesap makinesi kullanarak bulunuz.

ÇÖZÜM

a)

Ay	Tasarruf Miktarı (TL)
Ocak	100 TL
Şubat	$100+100\cdot\frac{10}{100}=100\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)=100\cdot\frac{11}{10}$
Mart	$100\cdot\frac{11}{10}+100\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{10}{100}=100\cdot\frac{11}{10}\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)=100\cdot\left(\frac{11}{10}\right)^2$
⋮	⋮
n. ay	$f(n)=100\cdot\left(\frac{11}{10}\right)^{n-1}$

b) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=100+100\cdot\frac{11}{10}+100\cdot\left(\frac{11}{10}\right)^2+100\cdot\left(\frac{11}{10}\right)^3$

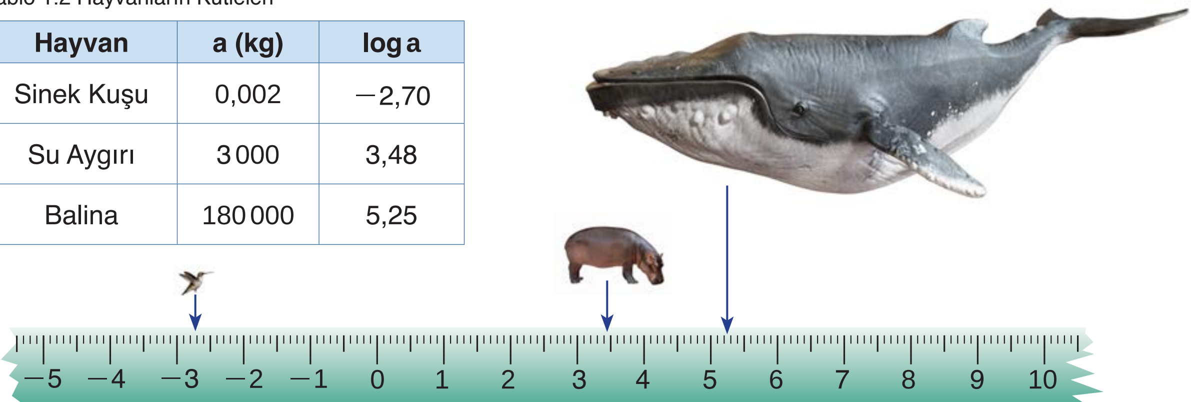
$$=100\cdot\left(1+\frac{11}{10}+\left(\frac{11}{10}\right)^2+\left(\frac{11}{10}\right)^3\right)=100\cdot\left(\frac{1-\left(\frac{11}{10}\right)^4}{1-\frac{11}{10}}\right)=464,10 \text{ olur.}$$

Logaritmik Ölçekler

Fiziksel değerler çok büyük veya çok küçük olduğunda bu sayılar ile çalışmak yerine bu sayıların logaritmaları ile çalışmak işlem kolaylığı sağlamaktadır. Örneğin aşağıdaki tabloda (Tablo 1.2) üç canlının kütleleri verilmiştir. Bu kütleleri bir cetvel üzerinde göstermek için 180 000 mm uzunluğunda bir cetvele ihtiyaç vardır. Ancak bu sayıları logaritmalarını alarak küçük bir cetvel (Görsel 1.4) üzerinde karşılaştırmak daha kolaydır.

Tablo 1.2 Hayvanların Kütleleri

Hayvan	a (kg)	log a
Sinek Kuşu	0,002	−2,70
Su Aygırı	3 000	3,48
Balina	180 000	5,25



Buna benzer şekilde depremlerin büyüklüğünü ölçen Richter ölçeği, asitliği ölçen pH ölçeği, sesin şiddetini ölçen desibel ölçeği gibi pek çok ölçek kullanılır.

26. ÖRNEK

Richter Ölçeği

Deprem ülkemizde her an yaşanabilecek bir afettir. Depremin boyutu, depremin şiddeti veya büyüklüğü ile ölçülür. Depremin şiddeti herhangi bir derinlikte olan depremin yeryüzünde hissedildiği bir noktadaki etkisinin ölçüsüdür. Depremin büyüklüğü ise deprem sırasında açığa çıkan enerjinin bir ölçüsü olarak tanımlanmaktadır.

R Richter ölçeğine göre depremin büyüklüğü, L depremin şiddeti, L_0 depremin deniz seviyesindeki şiddeti olarak alınırsa $R = \log\frac{L}{L_0}$ olarak modellenir.

Richter ölçeğine göre 1999 yılında Kocaeli'de meydana gelen depremin büyüklüğü 7,6 ve 2020 yılında İzmir'de meydana gelen depremin büyüklüğü 6,9 ölçülmüştür.

Buna göre Kocaeli'de meydana gelen depremin şiddetinin İzmir'de meydana gelen depremin şiddetinden kaç kat fazla olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

İzmir depremi için

$$R = \log\frac{L_i}{L_0}$$

$$6{,}9 = \log\frac{L_i}{L_0}$$

$$10^{6{,}9} = \frac{L_i}{L_0}$$

$L_i = L_0 \cdot 10^{6{,}9}$ olur.

Kocaeli depremi için

$$R = \log\frac{L_k}{L_0}$$

$$7{,}6 = \log\frac{L_k}{L_0}$$

$$10^{7{,}6} = \frac{L_k}{L_0}$$

$L_k = L_0 \cdot 10^{7{,}6}$ olur.

Buradan $\frac{L_k}{L_i} = \frac{10^{7{,}6} \cdot L_0}{10^{6{,}9} \cdot L_0} = 10^{0{,}7} \cong 5{,}01$ olur.

O hâlde Kocaeli'de meydana gelen depremin şiddeti İzmir'de meydana gelen depremin şiddetinin yaklaşık 5 katıdır.

Ders İçi Uygulama 34 — Bireysel Çalışma

5,6 şiddetindeki depremin 5,1 şiddetindeki depremden kaç kat fazla olduğunu bulunuz.

Ders İçi Uygulama 35 — Teknoloji

Desibel Ölçeği

Ses düzeyi ölçü birimi bel, adını telefonun mucidi Alexander Graham Bell'den (Aleksandır Grem Bel) almıştır. Bir desibel (dB) 10 bel olarak alınır. I ses şiddeti, B desibel cinsinden ses düzeyi ve $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 olmak üzere bu değerler arasında $B = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ bağıntısı vardır.

Buna göre ses düzeyi 112 dB olan bir stadyumda sesin şiddetinin kaç W/m^2 olduğunu hesaplamak için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. Adım: Verilen bilgiler $B = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ bağıntısında yerine yazılarak

$$112 = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$
$$11,2 = \log(I) - \log(10^{-12})$$
$$11,2 = \log(I) + 12$$
$$11,2 - 12 = \log(I)$$
$$-0,8 = \log_{10}(I)$$
$$I = 10^{-0,8} \text{ W/m}^2 \text{ bulunur.}$$

2. Adım: Bilimsel hesap makinesinde sırasıyla aşağıdaki tuşlara basılırsa

1	0	x^y	(	–	0	.	8	)	=

ve $I_0 \cong 0,158$ bulunur.

Bilimsel hesap makinesi kullanarak 120 dB ölçülen bir elektrikli testerenin ses şiddetinin 40 dB ölçülen bir bebeğin ses şiddetinden kaç kat fazla olduğunu hesaplayınız.

ALIŞTIRMALAR 1.7

1. n başlangıç kütlesi (mg), t zaman (yıl) olmak üzere uranyum-234 elementinin yarılanma ömrü $y = f(t) = n \cdot e^{kt}$ fonksiyonu ile modellendiği ve uranyum-234 elementinin yarılanma ömrünün yaklaşık 233 000 yıl olduğu bilinmektedir.

Buna göre günümüzde 20 mg kütleye sahip olan uranyum-234 elementinin yaklaşık kaç yıl önce 200 mg'lık kütleye sahip olduğunu bulunuz.

2. Moore Yasası'na göre bir bilgisayar işlemcisi üzerindeki transistör sayısı her iki yılda bir ikiye katlanır. Bu yasa $Q(t) = Q_o \cdot 2^t$ biçiminde modellenir.

Q_o : Başlangıçtaki transistör sayısı
$Q(t)$: t yıl sonraki transistör sayısı

1974 yılında bir bilgisayar firması, işlemcilerinde bulunan transistör sayısını 5000 adet olarak açıklamıştır.

Buna göre aynı firmanın 2022 yılındaki bilgisayar işlemcisinde kaç tane transistör olacağını bulunuz.

3. R Richter ölçeğine göre depremin büyüklüğü, L depremin şiddeti, L_0 depremin 0 seviyesindeki şiddeti olarak alınırsa $R = \log \frac{L}{L_0}$ şeklinde modellenmiştir.

Büyüklüğü 5,4 olan bir depremin hemen ardından 4,4 ve 3,2 büyüklüğünde iki artçı deprem meydana gelmiştir.

İlk depremin şiddetinin artçı depremlerin şiddetinden kaçar kat fazla olduğunu bulunuz.

4. n başlangıçtaki bakteri miktarı, k çoğalma sabiti olmak üzere bir bakteri türü 12 saatte bir ikiye bölünerek çoğalmaktadır.

Buna göre
a) Bu bakteri türünün belli bir zaman sonundaki sayısını veren üstel bir model oluşturunuz.

b) Başlangıçta 24 adet bakteri bulunan bir kapta 2 gün sonunda kaç adet bakteri olacağını bulunuz.

5. B desibel cinsinden ses düzeyi, I ses şiddeti ve $I_o = 10^{-12}$ W/m^2 olmak üzere
$B = 10 \cdot \log \frac{I}{I_o}$ şeklinde modellenmektedir.
Yaklaşık olarak insanların normal konuşma sesi 30 dB, bir çamaşır makinesinin çalışma sesi 60 dB olarak ölçülmüştür.

Bir çamaşır makinesinin ses şiddetinin bir insanın normal konuşmasındaki ses şiddetinden kaç kat fazla olduğunu bulunuz.

6. y, karbon-14 miktarının tüm karbon miktarına oranı; x, fosil yaşı olmak üzere $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}$ eşitliği sağlanmaktadır $(\log 2 \cong 0.3)$.
Antik bir vazoya yapılan karbon-14 testinde vazonun %15 karbon içerdiği görülmüştür.

Buna göre antik vazonun yaklaşık kaç yaşında olduğunu bulunuz.

7. H^+ bir çözeltideki iyon yoğunluğu (mol/l) olmak üzere çözeltinin pH değeri $pH = -\log(H^+)$ biçiminde bulunmaktadır.

pH değeri 6,5 olan bir elmanın içindeki H^+ iyonunun kaç mol/l olduğunu bulunuz.

Aşağıdaki tabloda verilen bilgilere göre boş bırakılan yerleri uygun biçimde doldurunuz.

1.

Fonksiyonun Kuralı	En Geniş Tanım Kümesi	Fonksiyonun Tersinin Kuralı	Fonksiyonun Tersinin Tanım Kümesi
$f(x) = 3 + \log_5(9 - x)$			
$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(3x + m) + 5$	$(-4, \infty)$		
		$f^{-1}(x) = \log_5(x - 2) + 1$	
$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} - 5$			$(-5, \infty)$

2-4. soruları aşağıdaki kutucuklarda verilen fonksiyonların numaralarını kullanarak cevaplayınız.

1 $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = (x - 1)^2$	4 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = 5^x$	7 $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 - 2x$
2 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2^{x+1} - 3$	5 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^3$	8 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = \frac{1}{e^{x-1}}$
3 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{1-x}$	6 $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{-1}{x}$	9 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = \left(\frac{\pi}{e}\right)^x$

2. Yukarıda verilen fonksiyonlardan üstel fonksiyon olanları bulunuz.

3. Yukarıda verilen fonksiyonlardan daima artan fonksiyonları bulunuz.

4. Yukarıda verilen fonksiyonlardan hem daima artan hem de üstel fonksiyonları bulunuz.

5-20. çoktan seçmeli soruları cevaplayınız.

5. $f(x) = e^{x+\pi}$

$h(x) = (5)^{2x-1}$

$g(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{3-x}$

$k(x) = \pi^2$

$m(x) = (-7)^{x+1}$

Yukarıda verilen fonksiyonlardan kaç tanesi üstel fonksiyondur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6. $f(x) = \log_4(x^2 + (m - 1)x + 9) + m$ **fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlı olduğuna göre m nin değer aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-6, 6)$ B) $(-5, 7)$ C) $\mathbb{R}$

D) $(-5, 6)$ E) $(0, 7)$

7. $f(x) = \left(\frac{m + 4}{2 - m}\right)^{x-1}$ **biçiminde tanımlanan f fonksiyonu bir üstel fonksiyon olduğuna göre m değerinin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) -7 B) -5 C) -4 D) 6 E) 8

8. $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ **olmak üzere**
$f:(3,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a(x-3) + 5$ **ve**
$f^{-1}(6) = 10$ **olduğuna göre a aşağıdakilerden hangisidir?**

A) e B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

9. $y = f(x) = e^{x-2}$ **olmak üzere**

I. $\log_e(y) + 2$
II. $\ln(e^2 y)$
III. $2 + \ln y$

ifadelerinden hangileri x e eşittir?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) II ve III E) I, II ve III

10. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ **olmak üzere** $f(x) = 5^{x+2}$ **ve**
$g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ **olmak üzere** $g(x) = \ln x + 2$
şeklinde tanımlanan f ve g fonksiyonları için

I. Bire bir - Örten fonksiyon
II. Azalan fonksiyon
III. Artan fonksiyon

olma durumlarından hangileri her iki fonksiyonun da ortak özelliğindendir?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) I ve III

11. $a > 1, b > 1$ **olmak üzere** $\log_a(a \cdot b) = x$ **ise** $\log_{(a \cdot b)} b$ **ifadesinin x türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{x}{x-1}$ B) $\frac{x-1}{x}$ C) $\frac{x+1}{x}$ D) $\frac{x}{x+1}$ E) $\frac{x-1}{x+1}$

12. $\log_3(8x + 5y) - 2 = \log_3(x - 3y)$ **olduğuna göre** $\log_{\frac{x}{y}} 4$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 0,2 B) 0,4 C) 2 D) 2,5 E) 3

13. $f(x) = \log_x(x^2 - x - 20) - \log_x(x - 2)$
biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-4, 0) \cup (2, 5)$

B) $(0, 2) \cup (5, \infty)$

C) $[(0, 2) \cup (5, \infty)] - \{1\}$

D) $(0, 2)$

E) $(5, \infty)$

14. Çubuk şeklindeki bir çikolata 5 çocuğa eşit paylaştırıldığında her bir parçanın uzunluğu $\log_3\left(\frac{x}{2}\right)$ birim, 4 çocuğa eşit paylaştırıldığında her bir parçanın uzunluğu $\log_3 x$ birim olmaktadır.

Buna göre x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 4 C) 16 D) 32 E) 64

15. Toprak, 1 den 100 e kadar (1 ve 100 dâhil) olan tam sayıların 4 tabanında logaritma değerlerini bilimsel hesap makinesi kullanarak bulmuştur. Hesap makinesinin ekranında görünen değer tam sayı ise o sayıyı, ondalık sayı ise tam kısmını defterine not almıştır. Daha sonra not aldığı sayıları toplamıştır.

Toprak'ın bulduğu sonuç kaçtır?

A) 204 B) 207 C) 212 D) 219 E) 221

16. $\log_2(\sin^2 33° + \sin^2 34° + \ldots + \sin^2 57°) = m$ **olmak üzere** $\log_4 50$ **ifadesinin m türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

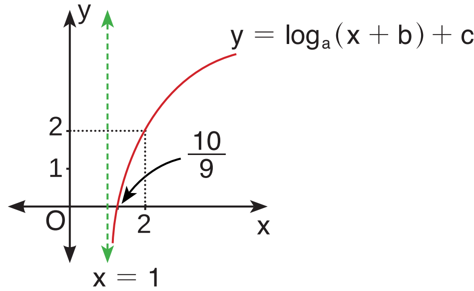
A) $\frac{m}{2}$ B) $\frac{m-1}{2}$ C) $\frac{m+1}{2}$ D) $\frac{m-2}{2}$ E) $\frac{m+2}{2}$

17. $\log 2 \cong 0,301$
$\log 3 \cong 0,477$
olduğuna göre $\log(0,072)$ **ifadesinin yaklaşık değeri kaçtır?**
A) $-2,301$ B) $-2,167$ C) $-1,477$ D) $-1,143$ E) $-0,778$

18. $6\log_x e - \ln x = 5$ **denkleminin kökler çarpımı kaçtır?**
A) e^{-5} B) e^{-3} C) e^{2} D) e^{3} E) e^{5}

19. $16^{3\log_8 3} - 125^{\log_{25} 4}$ **ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**
A) 95 B) 89 C) 81 D) 73 E) 64

20.



Yukarıda $y = \log_a(x + b) + c$ fonksiyonuna ait grafik verilmiştir.

Buna göre $\log_c(a + b + c)$ **değeri aşağıdakilerden hangisidir?**
A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

21-37. açık uçlu soruları cevaplayınız.

21. $\log_x y = \log_y z = \log_z x$ **olduğuna göre** $\log_x z + \log_z y + \log_y x$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

22. $-\frac{\pi}{2} < A < \frac{\pi}{2}$
$\log(1 + \sin A) = x$
$\log\left(\frac{1}{1 - \sin A}\right) = y$
olduğuna göre $\log(\cos A)$ **ifadesinin x ve y cinsinden değerini bulunuz.**

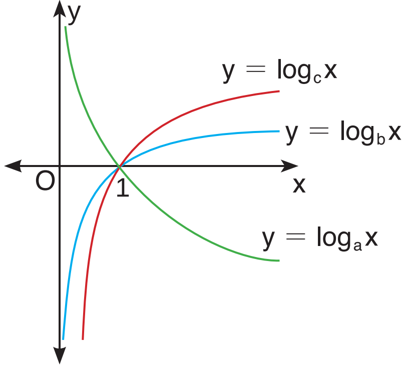
23. Aşağıdaki denklem ve eşitsizliklerinin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $\log(x + 3) - \log(x + 2) = -1$
b) $\log_3 x + \log_3(x - 2) = \log_3 8$
c) $\log_2(x - 1) \leq 1$
ç) $\log_3(x + 1) - \log_{\frac{1}{3}}(3 - x) \geq 1$

24. $\ln^2 x + \ln x^2 = 3$ **olduğuna göre x sayısının alabileceği değerleri bulunuz.**

25. $0 < a < 1$ **ve** $\log(3x - 2) = a - 1$ **olduğuna göre x sayısının alabileceği değerleri bulunuz.**

26. $x^{\ln x} = x$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

27. 

Yukarıdaki grafikte verilen bütün fonksiyonların grafikleri $(1, 0)$ noktasından geçmektedir.

Buna göre a, b ve c değerlerinin sıralamasını bulunuz.

28. $\log_2 x = \log_3 x^n$ **olduğuna göre n değerini hesaplayınız.**

29. $\log_m n = a$ **ve** $p^3 = n^b$ **olduğuna göre** $\log_p m$ **nin a ve b türünden değerini bulunuz.**

30. $\ln(x+1) - \ln x = \ln 3 - 1$ **denklemini sağlayan x değerini bulunuz.**

31. $\log e = a$ **olduğuna göre** $\ln 100$ **ifadesinin a türünden değerini bulunuz.**

32. $\log_4(x^2 \cdot y^3) = 5\log_4 x \cdot \log_4 y$
$\log_x 4 - \log_y 16 = 3$
denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

33. $9^x - 10.3^{x+1} + 81 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre $\log_{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$ **ifadesinin değerini hesaplayınız.**

34. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 3^x$ **ve** $(gof)(x) = 2x - 1$ **olduğuna göre** $g(x) = 3$ **denklemini sağlayan x değerini bulunuz.**

35. $f(x) = \ln(8x)$ **ve** $g(x) = \ln(16ex)$ **olduğuna göre** $(gof^{-1})(\ln 2)$ **değerini hesaplayınız.**

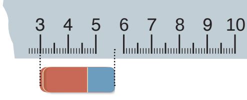
36. $f:[-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x+1) = \log_5(x+2) + 9$ ve $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x-2) = 3^{x-1} + 2$ fonksiyonları veriliyor.

$(f^{-1}og)(1)$ **değerini bulunuz.**

37. Uygun kümelerde tanımlı f ve g fonksiyonları için $f(x) = 5^{x-1} + 2$ şeklinde tanımlanıyor.

g fonksiyonunun grafiği ile f fonksiyonunun grafiği y = x doğrusuna göre simetrik olduğuna göre $g(127)$ **değerini bulunuz.**

38. Bora, $\log_2(x^2 - 2x + 5)$ birim uzunluğundaki silgisini bir ucu kırık, eşit bölmeli, 10 birim uzunluğundaki cetvelle aşağıdaki gibi ölçmüştür.



Buna göre x in değer aralığını bulunuz.

39-46. soruları bilimsel hesap makinesinden de faydalanarak cevaplayınız.

39. Bir şehrin başlangıçtaki nüfusu C ve çoğalma sabiti k olmak üzere t yıl sonundaki nüfusu $N(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$ ile modellenmiştir.

İstanbul'un yaklaşık nüfusu 2000 yılında 8,8 ve 2010 yılında 12,5 milyon olduğuna göre 2030 yılında nüfusunun yaklaşık kaç milyon olacağını bulunuz.

40. Bir çözeltide pH hesabı yapılırken $pH = -\log[H^+]$ bağıntısı kullanılır. Buradaki $[H^+]$ çözeltideki hidrojen iyonu konsantrasyonunu ifade eder. Bir çözeltinin asidik veya bazik olduğu pH değerine bakılarak tespit edilir. Eğer

$pH < 7$ ise asidik,
$pH = 7$ ise nötr,
$pH > 7$ ise baziktir.

Yukarıda verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) A marka içme suyu şişesinin üzerinde yazan pH değeri 7,6 olduğuna göre bu içme suyunun $[H^+]$ iyonu konsantrasyonunu bulunuz.

b) Bir çözeltideki $[H^+]$ konsantrasyonu 0,000036 mol/l ise bu çözeltinin pH değerini yaklaşık olarak bulunuz.

41. Tüm dünyayı etkisi altına alan COVID-19 salgınıyla mücadelede aşılanma oranları ülkeler için büyük önem arz etmektedir. X ülkesi bir ayda kullandığı aşı oranı %60 a düştüğünde karantina önlemleri uygulayacağını açıklamıştır. Ülkede ocak ayında üretilen aşıların %90 ı bitmiştir. Ülkede bu aydan t ay sonra kullanılan aşıların oranı, n başlangıçta kullanılan aşı miktarı olmak üzere $A = n \cdot e^{-0,1 \cdot t}$ bağıntısı ile modellenmektedir.

Buna göre X ülkesinde karantina önlemlerinin hangi ayda başlayacağını bulunuz.

42. Karbon-14 testi fosillerin yaşlarını hesaplamak için kullanılır. Karbon-14 elementinin yarılanma ömrü 5730 yıldır. Bu da başlangıçta 1 birim olan karbon-14 miktarının 5730 yıl sonra 1/2 birime düşmesi demektir. Karbon-14 bozunması $y = n \cdot e^{-0,000121 \cdot t}$ şeklinde üstel bir fonksiyon olarak modellenir. Bağıntıda t bulunan maddenin yaşı, n ise başlangıçta bulunan karbon-14 miktarıdır.

Bir fosile yapılan testte %25 oranında karbon-14 bulunduğu görülmüştür.

Buna göre bu fosilin günümüzden yaklaşık kaç yıl öncesine ait olduğunu bulunuz.

43. B(t) herhangi bir t anındaki bakteri miktarı, C başlangıçtaki bakteri miktarı, t geçen süre olmak üzere bakteri miktarını gösteren model $B(t) = C \cdot e^{0,01 \cdot t}$ biçiminde verilmiştir.

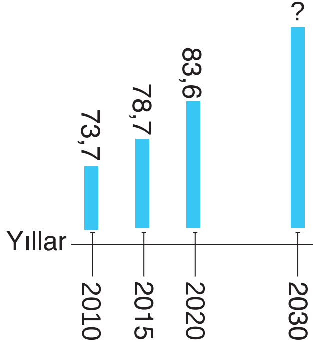
Başlangıçta bakteri kültüründe 1000 adet bakteri olduğuna göre kaç saat sonra bakteri sayısının $(10 \cdot e)^3$ olacağını bulunuz.

44. Vadeli mevduat hesabında bulunan anapara ile birlikte getirisi A anapara, r getiri oranı, t zaman (yıl) olmak üzere $A(t) = A \cdot e^{r \cdot t}$ biçiminde üstel fonksiyon olarak modellenir.

Çocuklarının geleceğine yatırım yapmak isteyen Ayşe Hanım ve Soner Bey birikimlerini yıllık olarak bankaya yatırıyorlar.

Bankanın yıllık getiri oranı %15 olduğuna göre Ayşe Hanım ve Soner Bey'in birikimlerinin kaç yıl sonra 3 katına çıkacağını bulunuz.

45. Yıllara Göre Türkiye Nüfusu



Bir istatistikçi 2015 yılında yukarıdaki grafikte 2010 ve 2015 yılları arasını baz alarak y nüfus (milyon), n başlangıçtaki nüfus (milyon), k değişim oranı sabiti ve t yıl bazında geçen süre olmak üzere Türkiye'nin ilerleyen yıllardaki yaklaşık nüfusunu $y = n \cdot e^{k \cdot t}$ bağıntısını kullanarak hesaplamak istiyor.

a) İstatistikçinin $y = n \cdot e^{k \cdot t}$ bağıntısını kullanarak 2020 yılı için bulduğu yaklaşık nüfus ile grafikte verilen nüfus arasındaki farkı bilimsel hesap makinesi yardımıyla hesaplayınız.

b) İstatistikçinin 2030 yılı için öngördüğü yaklaşık nüfusu bilimsel hesap makinesi yardımıyla hesaplayınız.

46. Maddenin ısı kaybı ile çevrenin ve maddenin sıcaklıkları arasındaki ilişki birçok bilim dalına konu olmuştur. Özellikle tıp biliminde, kriminal olayların aydınlatılmasında ve soğutma sistemlerinde Newton'ın Soğuma Kanunu kullanılarak birçok soruna çözüm bulunmuştur.

Soğuma sabitinin k, hava sıcaklığının $x\ ^\circ C$ olduğu bir ortamda ilk sıcaklığı y_0 olan maddenin t saat sonraki sıcaklığı y olmak üzere bu kanun $\ln\left(\frac{y - x}{y_0 - x}\right) = k \cdot t$ şeklinde modelleniyor.

Ayşe Hanım, annesinin doğum günü için evinde yemek daveti verecektir. Bunun için hazırlıklara başlayan Ayşe Hanım'ın mutfakta çalıştığı sürede hava sıcaklığının $30^\circ C$ olup değişmediği bilinmektedir.

Aşağıdaki soruları yukarıda verilen bilgilere göre cevaplayınız.

a) Ayşe Hanım'ın fırından çıkardığı yemek tepsisinin sıcaklığı $150\ ^\circ C$'dir. 10 dakika sonra tepsinin sıcaklığı $60\ ^\circ C$'ye düşmüştür. Bu durumda k soğuma sabitini bulunuz.

b) Tepsinin sıcaklığının yaklaşık kaç dakika sonra $40\ ^\circ C$ olacağını bulunuz.

c) Ayşe Hanım buzluktan çıkardığı $-15\ ^\circ C$ sıcaklıktaki kıymayı çözünmesi için tezgâha bırakmıştır. Kıymanın sıcaklığı 1 saat sonra $15\ ^\circ C$ olarak ölçülmüştür. 2 saat sonra kıymanın sıcaklığının kaç $^\circ C$ olacağını bulunuz.

Daha fazla soruya ulaşmak için karekodu okutunuz



SAYILAR VE CEBİR

2. DİZİLER

2.1. GERÇEK SAYI DİZİLERİ

Bu Bölümde Neler Öğreneceksiniz?

Gerçek Sayı Dizileri

- Dizi, sonlu dizi, sabit dizi ve dizilerin eşitliği kavramlarını,
- Genel terimi veya indirgeme bağıntısı verilen bir sayı dizisinin terimlerini bulmayı,
- Aritmetik ve geometrik dizilerin özelliklerini,
- Diziler yardımı ile gerçek hayat durumlarında karşılaşılan problemleri çözmeyi öğreneceksiniz.

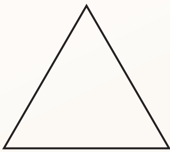


Alt öğrenme alanı karekodu

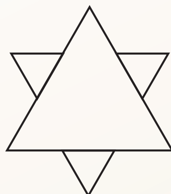


Hazırlık Çalışması

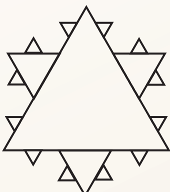
Helge Von Koch (Helge Fon Koh) tarafından 1904 yılında bulunan kar tanesi şeklindeki bölgenin çevre eğrisine Koch kar tanesi eğrisi denir. Koch kar tanesi, bir dizi aşamada yinelemeli olarak oluşturulabilir. I ve II. adımdaki üçgenler eşkenar üçgendir ve sonraki her adımda, bir önceki eşkenar üçgenlerin her birine dışa doğru üçgenler eklenerek ve daha küçük eşkenar üçgenler yapılarak oluşturulur.



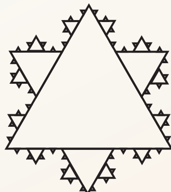
I. adım



II. adım



III. adım



IV. adım

Yandaki şekillerde görüldüğü gibi her adımda her bir eşkenar üçgenin kenarları üzerinde dışarı doğru yeni bir eşkenar üçgen oluşturulmaktadır.

Buna göre

a) 4. adımın sonunda oluşan şeklin kenar sayısını bulabilir misiniz?

b) Adım sayısı arttıkça oluşacak şeklin kenar sayısını veren bir fonksiyon bulunabilir mi?

2.1. GERÇEK SAYI DİZİLERİ

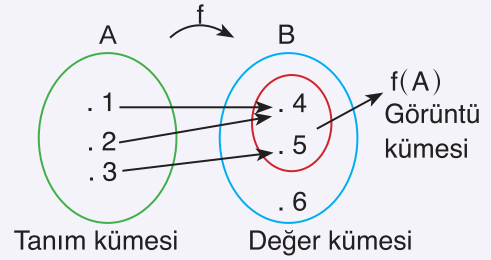
Terimler ve Kavramlar

- **Dizi**
- **Sonlu dizi**
- **Sabit dizi**
- **Aritmetik dizi**
- **Geometrik dizi**
- **Fibonacci dizisi**

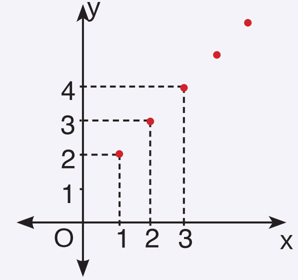
Dizi Kavramı

Hatırlatma Fonksiyon

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere A kümesinin her bir elemanını B kümesinin bir ve yalnız bir elemanı ile eşleyen kurala **A dan B ye tanımlı bir fonksiyon** denir. Fonksiyonlar f, g, h, ... gibi harfler ile $f: A \rightarrow B$ biçiminde gösterilir.



Örneğin $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{Z}^+$, değer kümesi $\mathbb{R}$ ve görüntü kümesi $f(A) = \{2, 3, 4, \ldots\}$ olur. Fonksiyonun grafiği yandaki gibidir.

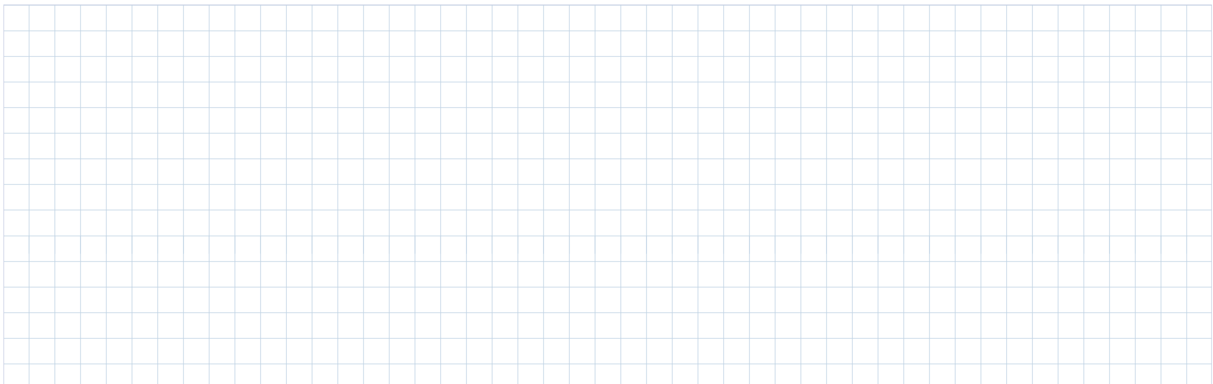


Ders İçi Uygulama 1 **Bireysel Çalışma**

Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların tanım, değer ve görüntü kümesini bulup grafiklerini çiziniz.

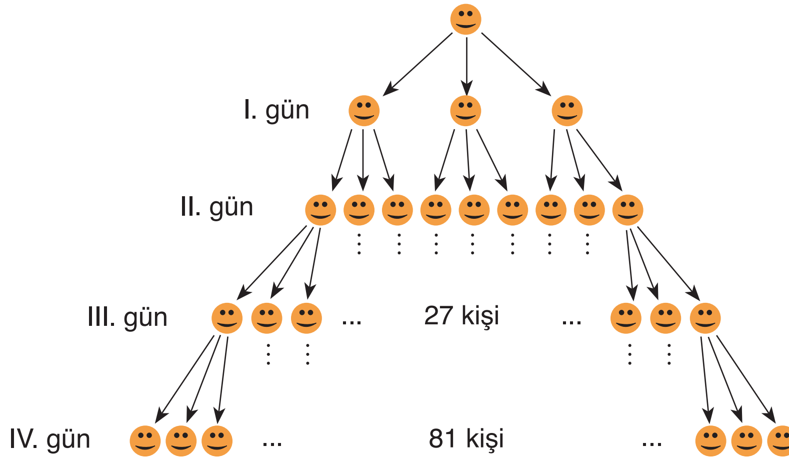
a) $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x - 3$



Okulda lösemili çocuklar yararına yardım kampanyası düzenlemek isteyen Deniz öğretmen, ilk gün üç öğrenciye etkinliği haber vermiş ve her gün her bir öğrencinin üç yeni öğrenciye haber vermesini istemiştir.

Aşağıdaki şema incelenirse etkinlik hakkında bilgi sahibi olan öğrenci sayısının her gün bir önceki günün üç katına çıktığı görülür.



4. günün sonunda bu etkinlikten toplam $3 + 9 + 27 + 81 = 120$ öğrencinin haberi olacaktır.

Tablo 2.1 Öğrenci Sayısı

Gün Sayısı	1.	2.	3.	4.	...	n.
Öğrenci Sayısı	3	9	27	81	...	3^n

Yukarıdaki tabloda (Tablo 2.1) görüldüğü gibi gün sayısı bir ve yalnız bir öğrenci sayısı ile eşleştiği için x gün sayısını belirtmek üzere her günün sonunda etkinlikten haberdar olan yeni öğrenci sayısını veren fonksiyonun $f(x) = 3^x$ olduğu görülür.

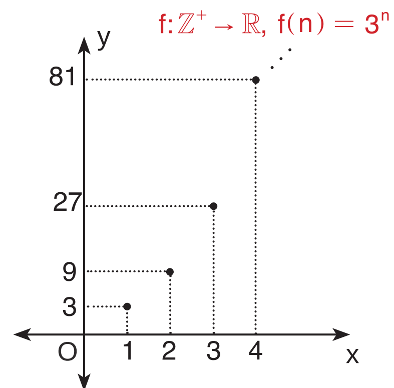
1. gün $f(1) = 3^1$
2. gün $f(2) = 3^2$
3. gün $f(3) = 3^3$
4. gün $f(4) = 3^4$

⋮

n. gün $f(n) = 3^n$ bulunur.

Bulunan bu değerler grafikte gösterilirse $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R},\ f(n) = 3^n$ fonksiyonunun grafiği yandaki gibi olur.

Bu şekilde pozitif tam sayılar kümesinden gerçek sayılar kümesine tanımlanan fonksiyonlar dizi kavramı ile ifade edilir.



Bilgi

Pozitif tam sayılar kümesinden gerçek sayılar kümesine tanımlanan her fonksiyona **gerçek sayı dizisi** veya kısaca **dizi** denir. Diziler genellikle (a_n) ile gösterilir.

$f:\mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(n) = a_n$ olmak üzere

1. terim $f(1) = a_1 \in \mathbb{R}$
2. terim $f(2) = a_2 \in \mathbb{R}$
3. terim $f(3) = a_3 \in \mathbb{R}$

$\vdots$

n. terim $f(n) = a_n \in \mathbb{R}$ olur.

$\vdots$

$n \in \mathbb{Z}^+$ için $f(n) = a_n$ ifadesine **dizinin genel terimi veya n. terimi**, n sayısına da **indis** denir. Genel terim dizinin bütün terimlerini üretir. Genel terimi a_n olan dizi (a_n) olarak gösterilir.

Bir a_n dizisi $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, \ldots)$ biçiminde yazıldığında $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, \ldots$ gerçek sayılarına **dizinin terimleri** denir.

Örneğin $(a_n) = (3^n)$ şeklinde tanımlanan dizinin terimleri $(a_n) = (3, 9, 27, 81, ..., 3^n, \ldots)$ biçimindedir.



1. ÖRNEK

Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların bir gerçek sayı dizisi olup olmadığını gösteriniz.

a) $f_1(n) = \dfrac{4n-2}{3n+3}$

b) $f_2(n) = \dfrac{2n+4}{n-8}$

c) $f_3(n) = \cos\left(n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$

ç) $f_4(n) = \log_{2n}(3n)$

d) $f_5(n) = \sqrt[3]{\dfrac{n^2+1}{9-n^2}}$

e) $f_6(n) = \sqrt{\dfrac{n-3}{n+2}}$

ÇÖZÜM

a) $f_1(n) = \dfrac{4n-2}{3n+3}$ fonksiyon kuralını tanımsız yapan değer $3n + 3 = 0 \Rightarrow n = -1$ olur.
$-1 \notin \mathbb{Z}^+$ olduğundan f_1 bir gerçek sayı dizisi belirtir.

b) $f_2(n) = \dfrac{2n+4}{n-8}$ fonksiyon kuralını tanımsız yapan değer $n - 8 = 0 \Rightarrow n = 8$ olur.
$f_2(8) \notin \mathbb{R}$ olduğundan $f_2(n)$ bir gerçek sayı dizisi belirtmez.

c) $f_3(n) = \cos\left(n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$ fonksiyonunu her $n \in \mathbb{Z}^+$ için tanımsız yapan bir değer bulunmadığından $f_3(n)$ bir gerçek sayı dizisi belirtir.

ç) $f_4(n) = \log_{2n}(3n)$ fonksiyonu her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $f_4(n) \in \mathbb{R}$ olduğundan $f_4(n)$ bir gerçek sayı dizisi belirtir.

d) $f_5(n) = \sqrt[3]{\dfrac{n^2+1}{9-n^2}}$ fonksiyonunu tanımsız yapan değerler $9 - n^2 = 0$ eşitliğini sağlayan $\{-3, 3\}$ değerleridir. $f_5(3) \notin \mathbb{R}$ olduğundan $f_5(n)$ gerçek sayı dizisi belirtmez.

e) $f_6(n) = \sqrt{\dfrac{n-3}{n+2}}$ fonksiyonu $\dfrac{n-3}{n+2} \geq 0$ için gerçek sayılar kümesinde tanımlıdır. Buradan $f_6(1) \notin \mathbb{R}$ ve $f_6(2) \notin \mathbb{R}$ olduğundan $f_6(n)$ bir gerçek sayı dizisi belirtmez.

Ders İçi Uygulama 2 — Bireysel Çalışma

1. Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların bir gerçek sayı dizisi olup olmadığını gösteriniz.

a) $f(n) = \sqrt{\dfrac{2n+1}{n+5}}$

b) $g(n) = \sqrt[3]{\dfrac{n+15}{16-n}}$

2. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere aşağıda verilen ifadelerin bir dizinin genel terimi olup olmadığını bulunuz.

a) $a_n = \log(n+9)$

b) $b_n = \sqrt{17-n}$

c) $c_n = \dfrac{n+1}{2n-5}$

2. ÖRNEK

$(a_n) = (n^3 - 2)$ dizisinin ilk 3 terimini ve $(n+1)$. terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$a_n = n^3 - 2$

$a_1 = 1^3 - 2 \Rightarrow a_1 = 1 - 2 \Rightarrow a_1 = -1$

$a_2 = 2^3 - 2 \Rightarrow a_2 = 8 - 2 \Rightarrow a_2 = 6$

$a_3 = 3^3 - 2 \Rightarrow a_3 = 27 - 2 \Rightarrow a_3 = 25$

$a_n = n^3 - 2$

$a_{n+1} = (n+1)^3 - 2$

$a_{n+1} = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2$

$a_{n+1} = n^3 + 3n^2 + 3n - 1$ bulunur.

3. ÖRNEK

$(b_n) = (2n - 1)$ dizisinin $(n + 2)$. terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$b_n = 2n - 1$ ifadesinde n yerine $n + 2$ yazılırsa
$b_{n+2} = 2 \cdot (n + 2) - 1$
$b_{n+2} = 2n + 4 - 1$
$b_{n+2} = 2n + 3$ bulunur.

4. ÖRNEK

Aşağıda ilk dört terimi verilmiş dizilerin genel terimini bulunuz.

a) $(a_n) = (-1, -3, -5, -7, \cdots)$

b) $(b_n) = (2, 6, 12, 20, ...)$

ÇÖZÜM

a) (a_n) dizisinin terimleri ardışık negatif tek tam sayılardır. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere tek sayılar $2n - 1$, negatif tek tam sayılar $1 - 2n$ ile gösterilir ise $(a_n) = (-1, -3, -5, -7, \ldots, 1 - 2n, \ldots)$ olur. (a_n) dizisinin genel terimi $a_n = 1 - 2n$ bulunur.

b) $(b_n) = (2, 6, 12, 20, ...) = (1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, 4 \cdot 5, ...)$ olduğundan (b_n) dizisinin genel terimi $b_n = n \cdot (n + 1) = n^2 + n$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 3

Bireysel Çalışma

Bir gölde yetişen balık türünü gözlemleyen biyologlar, bir balığın kütlesinin ilk haftanın sonunda 400 gram olduğunu ve sonraki her haftanın sonunda yaklaşık 2 gram arttığını gözlemlemişlerdir.

Buna göre
a) Haftalara göre göldeki bu balığın kütlesini ifade eden dizinin genel terimini yazınız.

b) 5. haftanın sonunda bu türden bir balığın yaklaşık kaç gram olacağını bulunuz.

c) Bu türden bir balığın kütlesinin kaçıncı haftanın sonunda 422 grama ulaşacağını bulunuz.

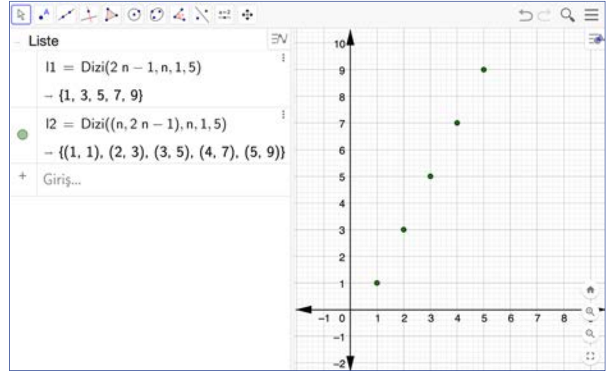
Ders İçi Uygulama 4 | Teknoloji

Dinamik matematik programını kullanarak genel terimi verilen bir dizinin terimlerini bulmak ve grafiğini çizmek için aşağıdaki adımlar uygulanır:

Genel terimi $2n - 1$, değişken n, başlangıç değeri 1 ve bitiş değeri 5 olmak üzere

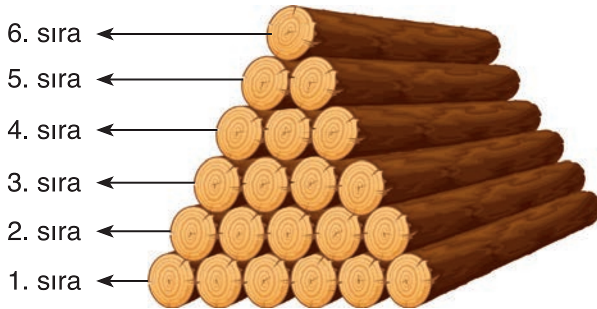
1. Adım: Giriş kısmına **Dizi(2n-1, n, 1, 5)** komutu girilerek $(a_n) = 2n - 1$ dizisinin terimleri listelenir.

2. Adım: Giriş kısmına **Dizi((n, 2n-1), n, 1, 5)** komutu girilerek $(a_n) = 2n - 1$ dizisinin grafiği çizilir.



Yukarıdaki örneğe göre $(a_n) = \left((-1)^n \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right)$ dizisinin ilk 10 terimini bularak grafiğini çiziniz.

Sonlu Dizi



Yandaki tomrukların sayıları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2.2 Tomruk Sayısı

Sıra Numarası (n)	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Tomruk Sayısı	6	5	4	3	2	1

a) A kümesinin elemanları sıra numaraları, B kümesinin elemanları tomruk sayıları olmak üzere A kümesinden B kümesine sıra numarasını (n) o sıradaki tomruk sayısına eşleyen f fonksiyonunu yazabilir misiniz?

b) $f(n) = a_n$ olmak üzere (a_n) dizisinin genel terimini yazabilir misiniz?

c) (a_n) dizisinin terimleri $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ dır. (a_n) dizisinin başka terimi var mıdır? (a_n) dizisinin terim sayısı hakkında ne söylenebilir?

$\mathbb{Z}^+$ sonsuz elemanlı bir kümedir. $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanan her fonksiyon da sonsuz terimli bir dizidir. Dolayısı ile sonsuz terimli bir dizinin terimleri $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ biçiminde olur. Örneğin $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset \mathbb{Z}^+$ kümesi verilsin. Bu durumda $f: A \subset \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$ biçiminde tanımlanan dizinin terimleri $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ olur. Burada $A \subset \mathbb{Z}^+$ olduğuna dikkat ediniz.

Bilgi

$k \in \mathbb{Z}^+$ ve $A_k \subset \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $A_k = \{1, 2, 3, ..., k\}$ kümesinden $\mathbb{R}$ ye tanımlanan her fonksiyona **sonlu dizi** denir.

$a_n: A_k \to \mathbb{R}$ olmak üzere (a_n) sonlu dizisinin terimleri $(a_1, a_2, a_3, ..., a_k)$ biçiminde gösterilir.

5. ÖRNEK

$A_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $a_n: A_4 \to \mathbb{R}$ olmak üzere genel terimi $a_n = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ olarak verilen dizinin terimlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ olur.

$(a_n) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos(\pi), \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right), \cos(2\pi)\right) = (0, -1, 0, 1)$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 5 — Bireysel Çalışma

1. $(a_n) = (\sqrt{6 - n})$ sonlu dizisinin terimlerini bulunuz.

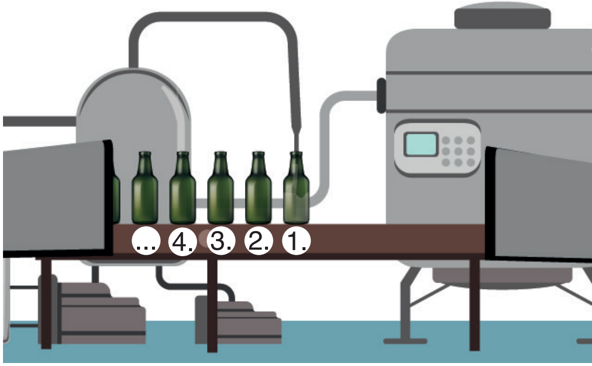
2. $A_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesi veriliyor. Genel terimi $a_n = \log_{(n+1)}(n + 2)$ olan $a_n: A_6 \to \mathbb{R}$ dizisi için $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6$ değerini bulunuz.

3. Genel terimi

$$a_n = \begin{cases} 2n + 1, & 1 \le n < 4 \text{ ise} \\ a_{n-1} + 3, & 4 \le n < 10 \text{ ise} \end{cases}$$

olan (a_n) dizisinin 5. terimini bulunuz.

Sabit Dizi



Bir fabrikada maden suyu şişelerine dolum yapan bir makine, her seferinde şişelere 200 mL maden suyu doldurmaktadır.

Tablo 2.3 Şişe Sayısı

Şişe Numarası (n)	**1.**	**2.**	**3.**	**...**	**n.**
Maden Suyu Miktarı (mL)	200 mL	200 mL	200 mL	...	200 mL

A kümesinin elemanları şişe numarası, B kümesinin elemanları o şişeye doldurulan maden suyu miktarı (mL) olmak üzere A kümesinden B kümesine şişe numarasını (n) maden suyu miktarına eşleyen $f(n) = a_n$ dizisi $(a_n) = (200)$ biçimindedir. Bu dizide $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 200$ olduğu görülür.

Bilgi

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $n \in \mathbb{Z}^+$ için genel terimi $a_n = c$ olan (a_n) dizisine **sabit dizi** denir. (a_n) sabit dizi ise $a_1 = c$, $a_2 = c$, $a_3 = c$, ... olur.

6. ÖRNEK

Genel terimi $a_n = \dfrac{kn - 3}{2n + 1}$ olan (a_n) dizisi sabit dizi ise k değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

(a_n) dizisi sabit dizi olduğundan dizinin terimleri $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \ldots = c$ biçimindedir.
$a_1 = a_2$ olduğundan
$\dfrac{k \cdot 1 - 3}{2 \cdot 1 + 1} = \dfrac{k \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 + 1} \Rightarrow \dfrac{k - 3}{3} = \dfrac{2k - 3}{5} \Rightarrow 6k - 9 = 5k - 15 \Rightarrow k = -6$ bulunur.

7. ÖRNEK

$(a_n) = (2n^3 + bn^3 - dn^2 + cn + bn + d \cdot c + b)$ dizisi sabit dizi olduğuna göre (a_n) nin ilk 3 teriminin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

(a_n) dizisi sabit dizi olduğundan $n, n^2, n^3, \ldots$ gibi değişken içeren terimler dizinin genel teriminde bulunmaz.
(a_n) dizisinin genel terimi düzenlenirse

$a_n = (2 + b) \cdot n^3 - d \cdot n^2 + (c + b) \cdot n + (d \cdot c + b)$

$b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2$

$c + b = 0 \Rightarrow c = 2$ ve $d = 0$ olur.

(a_n) dizisi $(a_n) = (d \cdot c + b) = (0 \cdot 2 - 2) = (-2)$ olur.
Dizinin ilk üç teriminin toplamı $a_1 + a_2 + a_3 = -6$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 6 | **Bireysel Çalışma**

1. $(a_n) = \left(\frac{-2n + m}{3n + 4}\right)$ dizisi sabit dizi olduğuna göre m değerini bulunuz.

2. (a_n) pozitif terimli bir sabit dizi olmak üzere $a_{n+3} \cdot a_{n+1} - 2 \cdot a_n + 4 \cdot a_{n+2} = 3$ ise $a_{24} + a_{25} + a_{26}$ değerini bulunuz.

Eşit Diziler

$(a_n) = (\cos(n \cdot \pi))$ ile $(b_n) = ((-1)^n)$ dizileri verilsin. (a_n) dizisinin terimleri
$(a_n) = (\cos\pi, \cos 2\pi, \cos 3\pi, \ldots, \cos n\pi, \ldots)$ olur. $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere
$\cos\pi = \cos 3\pi = \cos 5\pi = \ldots = \cos((2k-1)\pi) = -1$
$\cos 2\pi = \cos 4\pi = \cos 6\pi = \ldots = \cos((2k)\pi) = 1$
olduğundan $(a_n) = (-1, 1, -1, \ldots)$ bulunur.
(b_n) dizisinin terimleri $(b_n) = (-1, 1, -1, \ldots)$ olur.
(a_n) ve (b_n) dizilerinin aynı indisli terimlerinin birbirine eşit olduğu görülür.

Bilgi

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n = b_n$ ise (a_n) dizisi ile (b_n) dizisi birbirine eşittir ve $(a_n) = (b_n)$ biçiminde gösterilir.

8. ÖRNEK

$(a_n) = \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)$ ve $(b_n) = \left(3 + \frac{k-1}{n+2}\right)$ dizileri veriliyor. $(a_n) = (b_n)$ olduğuna göre k değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(a_n) = (b_n)$ ise $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n = b_n$ olur.

$n = 1$ için $a_1 = b_1 \Rightarrow \frac{3 \cdot 1 + 1}{1 + 2} = 3 + \frac{k-1}{1+2}$

$\frac{4}{3} = \frac{9 + k - 1}{3} \Rightarrow 4 = 8 + k \Rightarrow k = -4$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 7 — Bireysel Çalışma

1. Genel terimleri $a_n = 3n^2 + (k+1) \cdot n + 1$ ve $b_n = (m+1) \cdot n^2 - p + 4$ dizileri eşit diziler ise $k + m + p$ değerini bulunuz.

2. $(a_n) = \begin{cases} k, & n \text{ tek sayı} \\ m, & n \text{ çift sayı} \end{cases}$ ve $(b_n) = (-1)^{n+1}$ dizileri eşit diziler ise $k + m$ değerini bulunuz.

İndirgeme Bağıntısı ile Verilen Diziler (İndirgemeli Diziler)

Bir işletme, ihtiyacı olan üniversite öğrencilerine karşılıksız burs vermeye karar vermiştir. Buna göre ilk yıl 20 öğrenciye burs verecek olan işletme, her yıl bir önceki yılın 2 katının 10 fazlası kadar öğrenciye burs vermeyi planlamıştır.

a) Yukarıda verilen bilgilere göre aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Yıl	1.	2.	3.	4.	5.
Burs Alacak Öğrenci Sayısı	20				

b) Burs alacak öğrenci sayısı (a_n) dizisi olarak tanımlanırsa bu dizinin her terimi bir önceki terim kullanılarak hesaplanır. Bu şekilde (a_n) dizisinin terimleri için bir kural bulunuz.

Bilgi

Her terimi kendinden önceki bir veya birkaç terim türünden tanımlanabilen dizilere **indirgemeli dizi** denir. Tanımlama bağıntısına da **indirgeme bağıntısı** denir.

9. ÖRNEK

Ayşe her gün bir önceki gün okuduğu sayfa sayısının 2 katının 4 fazlası kadar kitap okumayı planlamıştır. İlk gün 20 sayfa kitap okuduğuna göre

a) Ayşe'nin ilk dört günde toplam kaç sayfa kitap okuduğunu bulunuz.

b) n gün sayısı olmak üzere Ayşe'nin okuduğu sayfa sayısı (a_n) dizisinin terimleri ise bu kurala uyan bir indirgeme bağıntısı bulunuz.

ÇÖZÜM

a)

Gün Sayısı	1.	2.	3.	4.
Okuduğu Sayfa Sayısı	20	44	92	188

İlk dört gün toplam okuduğu sayfa sayısı $20 + 44 + 92 + 188 = 344$ olarak bulunur.

b) Ayşe'nin okuduğu sayfa sayısı (a_n) dizisinin terimleri olmak üzere

$a_2 = 2a_1 + 4$

$a_3 = 2a_2 + 4$

$a_4 = 2a_3 + 4$

$\vdots$

$a_{n+1} = 2a_n + 4$ olduğundan indirgeme bağıntısı $a_{n+1} = 2a_n + 4$ olarak elde edilir.

10. ÖRNEK

$a_1 = 1$, $a_2 = 1$ ve $n \geq 3$ için $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ indirgeme bağıntısı ile verilen dizinin ilk 8 terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$

$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$

$a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$

$a_7 = a_6 + a_5 = 8 + 5 = 13$

$a_8 = a_7 + a_6 = 13 + 8 = 21$ bulunur.

11. ÖRNEK

$a_1 = -2$ ve $n \geq 2$ için $a_n = a_{n-1} + 4$ indirgeme bağıntısı ile verilen (a_n) dizisi için a_8 değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$a_n = a_{n-1} + 4$ indirgeme bağıntısında

$n = 2 \Rightarrow \quad \cancel{a_2} = a_1 + 4$

$n = 3 \Rightarrow \quad \cancel{a_3} = \cancel{a_2} + 4$

$\vdots$

$n = 8 \Rightarrow \quad + \; a_8 = \cancel{a_7} + 4$

$a_8 = a_1 + 7 \cdot 4 = -2 + 28 = 26$ bulunur.

Eşitlikler taraf tarafa toplanır.

12. ÖRNEK

$n > 1$ için $a_n = a_{n-1} + \frac{8-n}{n}$ indirgeme bağıntısı ile verilen bir (a_n) dizisinde $a_1 = -\frac{4}{15}$ olduğuna göre a_5 değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen indirgeme bağıntısına göre

$$n = 2 \Rightarrow \cancel{a_2} = a_1 + \frac{6}{2}$$

$$n = 3 \Rightarrow \cancel{a_3} = \cancel{a_2} + \frac{5}{3}$$

$$n = 4 \Rightarrow \cancel{a_4} = \cancel{a_3} + \frac{4}{4}$$

$$n = 5 \Rightarrow + \; a_5 = \cancel{a_4} + \frac{3}{5}$$

$$a_5 = a_1 + 4 + \frac{34}{15} \Rightarrow a_5 = -\frac{4}{15} + 4 + \frac{34}{15} \Rightarrow a_5 = 4 + 2 = 6 \text{ bulunur.}$$

13. ÖRNEK

$a_1 = 2$ ve $n \geq 2$ için $a_n = a_{n-1} + 2n$ biçiminde indirgeme bağıntısı ile verilen (a_n) dizisinin genel terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen indirgeme bağıntısına göre

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 + 2 \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad \cancel{a_2} - a_1 = 4$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + 2 \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad \cancel{a_3} - \cancel{a_2} = 6$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = a_3 + 2 \cdot 4 \quad \Rightarrow \quad \cancel{a_4} - \cancel{a_3} = 8$$

$$\vdots$$

$$n = n \Rightarrow a_n = a_{n-1} + 2 \cdot n \quad \Rightarrow \quad + \; a_n - \cancel{a_{n-1}} = 2n$$

$$a_n - a_1 = 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n$$

$$a_n - 2 = 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n$$

$$a_n = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n$$

$$a_n = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) \Rightarrow a_n = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow a_n = n^2 + n \text{ bulunur.}$$

14. ÖRNEK

$a_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için $a_n = n \cdot a_{n-1}$ biçiminde indirgeme bağıntısı ile verilen (a_n) dizisinin genel terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen indirgeme bağıntısına göre

$$n = 2 \Rightarrow \cancel{a_2} = 2 \cdot a_1$$

$$n = 3 \Rightarrow \cancel{a_3} = 3 \cdot \cancel{a_2}$$

$$n = 4 \Rightarrow \cancel{a_4} = 4 \cdot \cancel{a_3}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$n = n \Rightarrow \times \; a_n = n \cdot \cancel{a_{n-1}}$$

$$a_n = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \cdot a_1 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \cdot 1 = n! \text{ bulunur.}$$

Eşitlikler taraf tarafa çarpılır.

Ders İçi Uygulama 8 — Bireysel Çalışma

1. $a_1 = 12$ ve $a_{n+1} = a_n + 3n - 1$ biçiminde indirgeme bağıntısı ile verilen (a_n) dizisinde a_5 değerini bulunuz.

2. $a_1 = 1$ ve $a_{n+1} = 2 \cdot n \cdot a_n$ biçiminde indirgeme bağıntısı ile verilen (a_n) dizisinde a_{16} değerini bulunuz.

15. ÖRNEK

$(a_n) = \left(\dfrac{n^2 - n - 20}{3n + 5}\right)$ dizisinin kaç teriminin negatif olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\dfrac{n^2 - n - 20}{3n + 5} < 0$ eşitsizliğini sağlayan n değerlerini bulmak için $n^2 - n - 20 = 0$ ve $3n + 5 = 0$ denklemlerinin kökleri bulunarak işaret tablosu yapılır.

$n^2 - n - 20 = 0$

$(n - 5)(n + 4) = 0$

$n = 5$ veya $n = -4$ ve

$3n + 5 = 0 \Rightarrow n = -\dfrac{5}{3}$ olur.

n	$-\infty$ … -4	-4 … $-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$ … 5	5 … $+\infty$
$\dfrac{n^2 - n - 20}{3n + 5}$	$-$	$+$	$-$	$+$
	Çözüm		Çözüm	

Tablodaki çözüm kümelerinden 1, 2, 3 ve 4 pozitif tam sayıları seçilebileceğinden a_1, a_2, a_3 ve a_4 olmak üzere dizinin 4 terimi negatiftir.

16. ÖRNEK

Genel terimi $a_n = \dfrac{4n + 9}{n + 6}$ olan dizinin $(-1, 3)$ nda kaç tane terimi olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

(a_n) dizisinin $(-1, 3)$ ndaki terimleri $-1 < a_n < 3$ biçimindedir.

$-1 < \dfrac{4n + 9}{n + 6} < 3$ eşitsizliğinde $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $n + 6 > 0$ olduğundan eşitsizlik

$-n - 6 < 4n + 9 < 3n + 18$ olarak yazılabilir.

$-n - 6 < 4n + 9$ ve $4n + 9 < 3n + 18$

$-15 < 5n$ $\qquad$ $4n - 3n < 18 - 9$

$-3 < n$ $\qquad$ $n < 9$ bulunur.

$-3 < n < 9$ olur. $n \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan $(-1, 3)$ nda dizinin $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_8$ terimleri olmak üzere 8 tane terimi vardır.

17. ÖRNEK

Genel terimi $a_n = \dfrac{4n+5}{5n-4}$ olan dizinin hangi terimlerinin $\dfrac{8}{7}$ den büyük olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\dfrac{4n+5}{5n-4} > \dfrac{8}{7}$

$\dfrac{4n+5}{5n-4} - \dfrac{8}{7} > 0$

$\dfrac{28n+35-40n+32}{35n-28} > 0$

$n \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan $35n - 28 > 0$ olur.

$-12n + 67 > 0$

$67 > 12n$

$n < \dfrac{67}{12}$ olur.

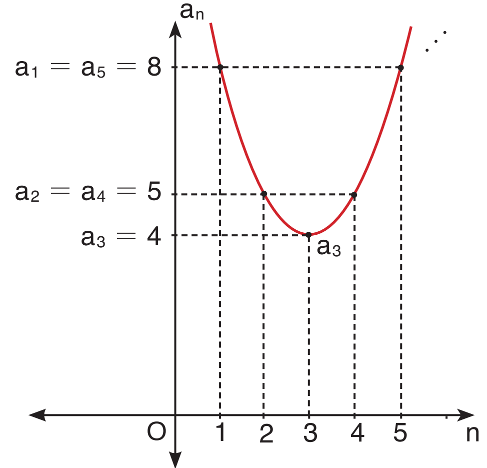
a_1, a_2, a_3, a_4 ve a_5 terimleri $\dfrac{8}{7}$ den büyük olur.

18. ÖRNEK

$(a_n) = (n^2 - 6n + 13)$ dizisinin <u>en küçük</u> terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ye tanımlanan $f(x) = x^2 - 6x + 13$ fonksiyonunun grafiği bir parabol belirtir ve bu fonksiyon en küçük değerini tepe noktasında alır.
$f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktasının apsisi
$r = -\dfrac{b}{2a}$ olduğundan $r = -\dfrac{(-6)}{2 \cdot 1} = 3$ olur.
$(a_n) = (n^2 - 6n + 13)$ dizisi için n pozitif tam sayı olduğundan f fonksiyonunun tepe noktasının apsisine en yakın olan pozitif tam sayı değeri seçilmelidir. Bu durumda $n = 3$ için dizinin en küçük terimi
$a_3 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 13 = 4$ bulunur.



19. ÖRNEK

$(a_n) = \left(\dfrac{2n+19}{n+2}\right)$ dizisinin hangi terimlerinin tam sayı olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\dfrac{2n+19}{n+2} = \dfrac{2(n+2)+15}{n+2}$

$= \dfrac{2(n+2)}{n+2} + \dfrac{15}{n+2} = 2 + \dfrac{15}{n+2}$ olur.

(a_n) dizisinin tam sayı olan terimleri $\dfrac{15}{n+2}$ ifadesini tam sayı yapan değerlerdir. n değerleri 1, 3 ve 13 alınırsa $\dfrac{15}{n+2}$ ifadesi tam sayı olur. O hâlde (a_n) dizisinin a_1, a_3 ve a_{13} terimleri tam sayıdır.

20. ÖRNEK

Bir süpermarkette kasanın önünde bulunan LÖSEV yardım kumbarasında ilk gün 200 TL para bulunmaktadır. Bu kumbaradaki para miktarı her gün bir önceki güne göre %10 artmakta ve her günün sonunda bu kumbaradan 50 TL alınıp LÖSEV'in banka hesabına yatırılmaktadır.

Yukarıda verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) n. gün kumbarada bulunan para miktarı bir (a_n) dizisinin genel terimi olmak üzere (a_n) dizisine ait bir indirgeme bağıntısı bulunuz.

b) 3 gün sonra kumbarada bulunan para miktarını hesaplayınız.

c) İlk olarak kaçıncı günde LÖSEV'in banka hesabına para yatırılamayacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) 1. gün $a_1 = 200$

2. gün $a_2 = a_1 + a_1 \cdot \frac{10}{100} - 50$

3. gün $a_3 = a_2 + a_2 \cdot \frac{10}{100} - 50$

⋮

n. gün $a_n = a_{n-1} + a_{n-1} \cdot \frac{10}{100} - 50$

$a_n = a_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) - 50$ bulunur.

b) 3 gün sonra kumbarada biriken para miktarı

$a_2 = 1,1 \cdot a_1 - 50 = 1,1 \cdot 200 - 50 = 170$ TL

$a_3 = 1,1 \cdot a_2 - 50 = 1,1 \cdot 170 - 50 = 137$ TL olur.

c) Kumbaradaki para miktarı 50 TL'nin altına düştüğünde LÖSEV'in banka hesabına para yatırılamayacaktır.

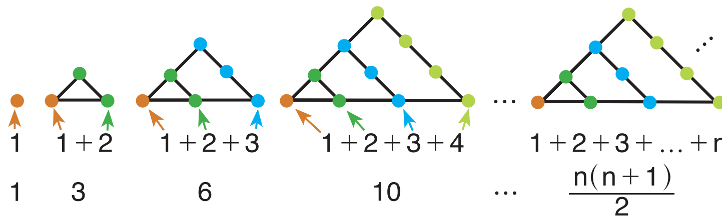
$a_4 = 1,1 \cdot a_3 - 50 = 1,1 \cdot 137 - 50 = 100,7$ TL

$a_5 = 1,1 \cdot a_4 - 50 = 1,1 \cdot 100,7 - 50 = 60,770$ TL

$a_6 = 1,1 \cdot a_5 - 50 = 1,1 \cdot 60,770 - 50 = 16,847$ TL

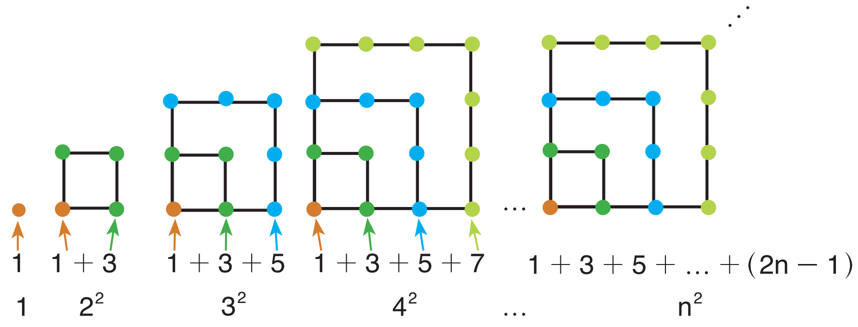
olduğundan 7. gün kumbaradaki para miktarı 50 TL'den az olacaktır. LÖSEV'in banka hesabına ilk olarak 7. gün para yatırılamayacaktır.

Ders İçi Uygulama 9 — Bireysel Çalışma



1 den n ye kadar ardışık doğal sayıların toplamı şeklinde yazılan sayılara **üçgensel sayılar** denir. Terimleri sırasıyla bu sayılar olan diziye ise **üçgensel sayı dizisi** denir.

Üçgensel sayılarla oluşturulan dizi ise $(a_n) = \left(1, 3, 6, 10, 15, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}, \ldots\right)$ biçimindedir.

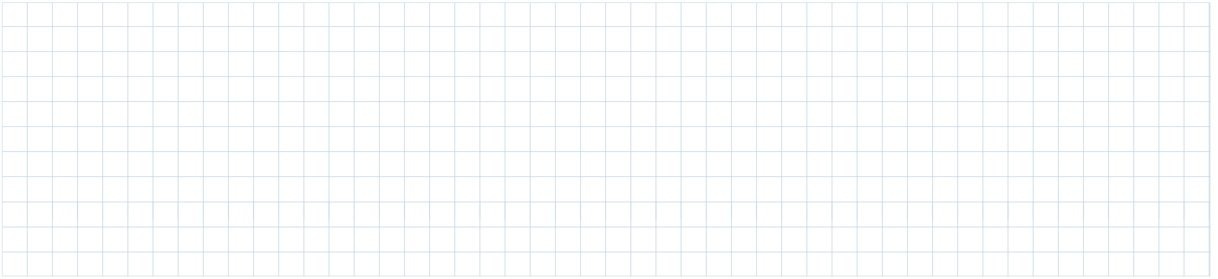


Bir tam sayının karesi şeklinde yazılabilen sayılara **karesel sayılar** denir.
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ olur.

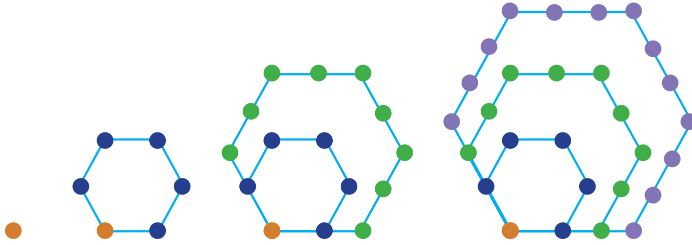
Karesel sayılarla oluşturulan diziye ise **karesel sayı dizisi** denir. Karesel sayı dizisi $(b_n) = (1, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, n^2, \ldots)$ biçimindedir.

Yukarıda verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

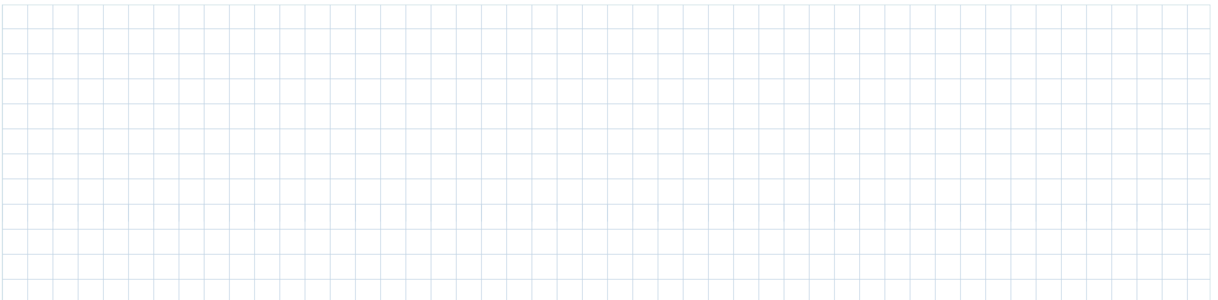
1. (a_n) üçgensel sayı dizisi, (b_n) karesel sayı dizisi olmak üzere $a_6 + b_3$ değerini hesaplayınız.



2.



Yukarıdaki biçimde verilen altıgensel sayı dizisi $(c_n) = (1, 6, 15, 28, \ldots)$ dir. (c_n) sayı dizisi için bir indirgeme bağıntısı bulunuz.



Ders İçi Uygulama 10 | Bireysel Çalışma

Dizilerle ilgili bir oyun tasarlayan Can, görseldeki gibi bir dart tahtası hazırlamıştır. Dart tahtasındaki numaralandırılmış bölgelerin değerleri tabloda verilmiştir.

1
2
3
4
5

Bölge Numarası	Değer
1	n^2
2	8
3	$5n^2$
4	$4n$
5	-7

Oyunun kuralları aşağıda verilmiştir,

- Oyun 2 kişiliktir ve 2 turdan oluşur.
- 1. turda her oyuncu sırayla üçer ok atışı yapar ve elde edilen değerler toplanarak dizinin genel terimi oluşturulur.
- Sonra sıra ile birer zar atılarak oluşturulan dizide n yerine üste gelen sayı yazılır ve sonuç puan olarak kişinin hanesine yazılır.
- 2. turda oyuncular ikişer ok atışı yapar ve elde edilen değerler toplanarak dizinin genel terimi oluşturulur.
- Oyuncular sırayla birer zar atar ve üste gelen sayı n olacak şekilde ilk n terim toplamı oyuncuların hanesine puan olarak yazılır.

Bu oyunu oynayan Can ve Özden'in 1 ve 2. turdaki ok atışlarında okun isabet ettiği bölgeler ve atılan zarlar aşağıda verilmiştir.

	1. Tur Ok Atışı	1. Tur Zar Atışı	2. Tur Ok Atışı	2. Tur Zar Atışı
Can	3, 5, 2	3	1, 2	6
Özden	1, 2, 4	2	2, 4	4

Buna göre oyunu hangi oyuncunun kaç puan ile kazandığını bulunuz.

1. Aşağıdaki ifadelerden hangilerinin bir dizi belirttiğini bulunuz.

a) $(a_n) = \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)$

b) $(b_n) = (1,3,5,...)$

c) $(c_n) = \left(\frac{n-1}{2n-1}\right)$

ç) $(d_n) = \left(\frac{3n+1}{n^2-9}\right)$

d) $(e_n) = \left(\frac{1}{2n^2-1}\right)$

e) $(f_n) = \left(\left(\frac{\pi}{\sqrt{2} \cdot n - e}\right)^2\right)$

2. Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin ilk 5 terimini bulunuz.

a) $a_n = \begin{cases} \frac{n-1}{2n}, & n \text{ tek ise} \\ \frac{n+1}{2n+1}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$

b) $a_n = 1 + 4 + 9 + ... + n^2$

c) $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \Rightarrow a_n = \binom{2n}{n}$

3. Aşağıdaki dizilerin genel terimlerini bulunuz.

a) $(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, ...\right)$

b) $(b_n) = (10^0, 10^2, 10^4, 10^6, \dots)$

c) $(c_n) = \left(1, 1, 2, \frac{1}{4}, 3, \frac{1}{9}, 4, \frac{1}{16}, ...\right)$

4. $a_n : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \mathbb{R}$ **ve** $(a_n) = (\sqrt{n^2 + n + 1})$ **olduğuna göre** (a_n) **dizisinin terimlerini bulunuz.**

5. (a_n) **gerçek sayı dizisinin indirgeme bağıntısı** $a_n = n \cdot a_{n-1}$ **olduğuna göre** $1 + \frac{a_{n+1}}{a_n}$ **ifadesinin n cinsinden değerini bulunuz.**

6. (a_n) **dizisi için** $n > 2$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ **ve** $a_n + a_{n-2} = a_{n-1}$ **olduğuna göre** $\frac{a_6 \cdot a_5}{a_4}$ **değerini bulunuz.**

7. $a_n = \begin{cases} \frac{5n-b}{n-c}, & n < 4 \text{ ise} \\ 5, & n = 4 \text{ ise} \\ \frac{10n+b+1}{2n+3-c}, & n > 4 \text{ ise} \end{cases}$

genel terimi ile verilen dizi sabit bir dizi ise $b + c$ **değerini bulunuz.**

8. $(a_n) = (\cos((n-1) \cdot \pi))$ **ile** $(b_n) = (\sin((c \cdot n - d) \cdot \pi))$ **dizileri eşit diziler olduğuna göre** $c + d$ **değerini bulunuz.**

9. $a_n = \frac{\log_2 n}{2^n}$ **genel terimi ile verilen dizinin 16. terimini bulunuz.**

10. (a_n) **gerçek sayı dizisi için** $a_{n+1} - a_n = 2n$ **ve** $a_1 = 5$ **olduğuna göre bu dizinin 8. terimini bulunuz.**

11. $(a_n) = \left(\frac{n^2 - 5n - 6}{3n - 1}\right)$ **dizinin kaç teriminin negatif olduğunu bulunuz.**

12. $(a_n) = \left(\frac{4n}{n+3}\right)$ **dizisinin** $\frac{7}{3}$ **ten büyük olan ilk terimini bulunuz.**

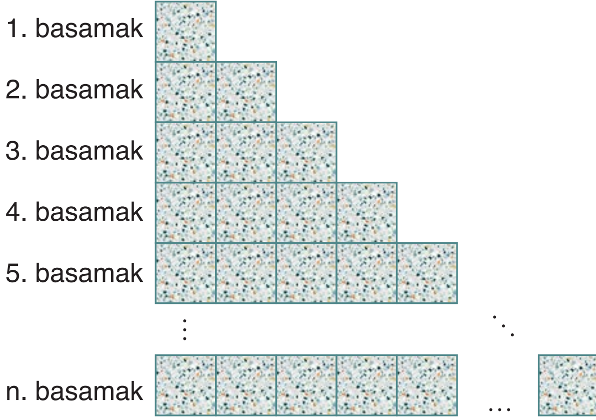
13. $(a_n) = (-2n^2 + 6n + 5)$ **olan dizinin en büyük terimini bulunuz.**

14. $(a_n) = \left(\frac{5n - 13}{n + 1}\right)$ **olan dizinin kaç teriminin tam sayı olduğunu bulunuz.**

15. $(a_n) = \left(\frac{1}{n+2}\right)$ **dizisinin kaç teriminin** $\left[\frac{2}{15}, \frac{1}{5}\right]$ **nda olduğunu bulunuz.**

Aritmetik, Geometrik Diziler ve Özellikleri

Bir Dizinin Kısmi Toplamları



Aydın Usta yandaki merdivenin yan yüzeyini seramik ile kaplayacaktır. 1. basamaktan başlayarak kullanacağı seramik sayıları (a_n) dizisinin terimleri olmak üzere

a) (a_n) dizisini oluşturunuz.

b) Aydın Usta'nın ilk n tane basamakta kullanacağı seramik sayısının toplamını ifade eden bir kural bulunuz.

Bilgi

Bir (a_n) dizisinin birinci teriminden n. terimine kadar terimlerinin toplamına **dizinin kısmi toplamı** denir ve $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ biçiminde gösterilir. Ayrıca $a_n = S_n - S_{n-1}$ dir.

Bu durumda bir (a_n) dizisinde

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
$\vdots$
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ şeklinde bulunur.

21. ÖRNEK

Genel terimi $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ olan dizinin ilk 4 teriminin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$a_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} = 1$$
$$a_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-1} = \frac{1}{3}$$
$$a_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$+ \quad a_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{4-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow S_4 = \frac{40}{27} \text{ bulunur.}$$

22. ÖRNEK

Genel terimi $a_n = \dfrac{1}{n^2 + n}$ olan dizinin ilk 8 teriminin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$a_n = \dfrac{1}{n^2 + n} = \dfrac{A}{n} + \dfrac{B}{n + 1}$ şeklinde basit kesirlerin toplamı olarak yazılırsa ve

$$\frac{1}{n^2 + n} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n + 1}$$

$$1 = (n + 1) \cdot A + n \cdot B$$

$$1 = n \cdot A + A + n \cdot B$$

$$1 = n(A + B) + A$$

aynı dereceli terimlerin katsayılarının eşitlenmesi ile bulunan $A + B = 0$ ve $A = 1$ denklemleri çözülürse $B = -1$ olur. Buradan $a_n = \dfrac{1}{n^2 + n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n + 1}$ elde edilir.

Buna göre

$$a_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$+ \quad a_8 = \frac{1}{8} - \frac{1}{9}$$

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_8 = S_8 = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$ bulunur.

23. ÖRNEK

İlk n teriminin toplamı $S_n = n^2 + 2n - 7$ olan dizinin 5. terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ olduğundan

$a_5 = S_5 - S_4 = (5^2 + 2 \cdot 5 - 7) - (4^2 + 2 \cdot 4 - 7) = 28 - 17 = 11$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 11 — Bireysel Çalışma

İlk n teriminin toplamı $S_n = n^2 - 6n + 13$ olan dizinin 13. terimini bulunuz.

Toplam Sembolü

Bir (a_n) dizisinde ilk n terim toplamı $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ olmak üzere $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ile gösterilebilir. $\sum$ (sigma) sembolüne **toplam sembolü** denir. $\sum_{k=r}^{n} a_k$ ifadesi $k = r$ den n ye kadar a_k toplamı şeklinde okunur. k değişkenine **toplamın indisi** denir. $k = r$ toplamın alt sınırı, n ise toplamın üst sınırıdır. k değeri toplamın alt sınır değerinden üst sınır değerine kadar ardışık tam sayılar olarak artar.

24. ÖRNEK

Aşağıdaki toplamları hesaplayınız.

a) $\sum_{k=-2}^{4} (k+1)$ **b)** $\sum_{k=3}^{8} 4$ **c)** $\sum_{k=-5}^{6} k^3$ **ç)** $\sum_{k=1}^{8} \frac{(-1)^k \cdot k}{2}$

ÇÖZÜM

a) $\sum_{k=-2}^{4} (k+1) = (-2+1)+(-1+1)+(0+1)+(1+1)+(2+1)+(3+1)+(4+1)$

$= -1+0+1+2+3+4+5 = 14$

b) $\sum_{k=3}^{8} 4 = 4+4+4+4+4+4 = 24$

c) $\sum_{k=-5}^{6} k^3 = \cancel{(-5)^3} + \cancel{(-4)^3} + \cancel{(-3)^3} + \ldots + \cancel{3^3} + \cancel{4^3} + \cancel{5^3} + 6^3 = 216$

ç) $\sum_{k=1}^{8} \frac{(-1)^k \cdot k}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{2} - \frac{3}{2} + \frac{4}{2} - \frac{5}{2} + \frac{6}{2} - \frac{7}{2} + \frac{8}{2} = 10 - 8 = 2$ olur.

25. ÖRNEK

Aşağıdaki ifadeleri toplam sembolü kullanarak yazınız.

a) $2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 17^2$

b) $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{6} + \ldots + \sqrt[3]{32}$

c) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$

ç) $3 - 5 + 7 - 9 + 11 - 13 + 15$

ÇÖZÜM

a) $2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 17^2 = \sum_{k=1}^{16} (k+1)^2$

b) $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{6} + \ldots + \sqrt[3]{32} = \sum_{k=1}^{29} \sqrt[3]{k+3}$

c) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} = \sum_{k=1}^{5} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$

ç) $3 - 5 + 7 - 9 + 11 - 13 + 15 = \sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \cdot (2k+1)$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 12 Bireysel Çalışma

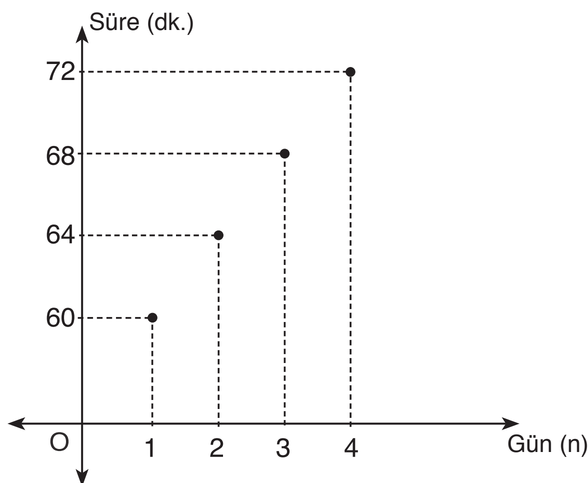
1. Aşağıda verilen dizilerin ilk 8 teriminin toplamını bulunuz.

a) $(a_n) = \left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2}\right)$ **b)** $(b_n) = (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$ **c)** $(c_n) = \left(\log_3\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$

2. Aşağıda toplam sembolü ile verilen ifadeleri hesaplayınız.

a) $\sum_{k=1}^{5} k^2$ **b)** $\sum_{k=1}^{6} ((-1)^k \cdot 2^{k-1})$ **c)** $\sum_{k=1}^{63} \log_2\left(\frac{k}{k+1}\right)$

Aritmetik Dizi



Yukarıdaki grafikte bir sporcunun günlük antrenman süreleri gösterilmiştir. Sporcunun antrenman sürelerini gösteren dizi (a_n) dizisi olsun.

Buna göre
a) (a_n) dizisinin ardışık terimleri arasındaki farkı bulunuz.

b) (a_n) dizisinin genel terimini bulunuz.

Bilgi

Ardışık her iki terimi arasındaki farkın eşit olduğu diziye **aritmetik dizi** denir.

(a_n) aritmetik dizi ise $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_n - a_{n-1} = ... = d$ olacak şekilde $d \in \mathbb{R}$ sayısına **aritmetik dizinin ortak farkı** denir ve $a_n - a_{n-1} = d \Rightarrow a_n = a_{n-1} + d$ elde edilir.

(a_n) aritmetik dizisinde ortak fark d olsun.

$$\begin{aligned} \cancel{a_2} - a_1 &= d \\ \cancel{a_3} - \cancel{a_2} &= d \\ \cancel{a_4} - \cancel{a_3} &= d \\ &\vdots \\ + \quad a_n - \cancel{a_{n-1}} &= d \\ \hline a_n - a_1 &= (n-1) \cdot d \text{ olur.} \end{aligned}$$

O hâlde (a_n) aritmetik dizisinin genel terimi $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ biçiminde elde edilir.

26. ÖRNEK

İlk terimi 10 ve ortak farkı 2 olan aritmetik dizinin 5. terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$a_1 = 10$, $d = 2$ ve $a_5 = a_1 + (5-1) \cdot d = a_1 + 4 \cdot d$ olduğundan
$a_5 = 10 + 4 \cdot 2 = 18$ bulunur.

27. ÖRNEK

$a_7 = 21$, $a_3 = 5$ olan bir aritmetik dizinin ortak farkını bulunuz.

ÇÖZÜM

$a_7 = 21$, $a_3 = 5$ ve $a_7 = a_3 + (7-3) \cdot d = a_3 + 4 \cdot d$ olduğundan
$21 = 5 + 4 \cdot d$
$16 = 4d \Rightarrow d = 4$ bulunur.

28. ÖRNEK

$(-4, -1, 2, 5, 8, ...)$ biçiminde verilen dizinin genel terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$-4, \quad -1, \quad 2, \quad 5, \quad 8, ...$
$+3 \quad +3 \quad +3 \quad +3$

Dizinin ardışık terimleri arasındaki fark eşit olduğundan bu dizi bir aritmetik dizidir.
Ortak fark $d = 3$ ve $a_1 = -4$ olduğundan genel terim

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ &= -4 + (n-1)3 \\ &= -4 + 3n - 3 = 3n - 7 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Aritmetik Dizinin Özellikleri

1. Ortak farkı d olan (a_n) aritmetik dizisi $p \in \mathbb{Z}^+$ ve $p < n$ olmak üzere $a_n = a_p + (n - p)d$ ve $d = \frac{a_n - a_p}{n - p}$ olur.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ - \quad a_p &= a_1 + (p-1)d \\ \hline a_n - a_p &= (n-1)d - (p-1)d \\ a_n - a_p &= nd - d - pd + d \\ a_n - a_p &= (n-p)d \end{aligned}$$

$a_n = a_p + (n - p)d$ elde edilir.

$d = \frac{a_n - a_p}{n - p}$ olarak bulunur.

29. ÖRNEK

$a_3 = 11$ ve $a_9 = 35$ olan bir aritmetik dizinin ortak farkını ve 15. terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Yol

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

$a_3 = a_1 + (3 - 1)d$

$11 = a_1 + 2d$

$a_9 = a_1 + (9 - 1)d$

$35 = a_1 + 8d$ olur.

$a_1 + 2d = 11$

$a_1 + 8d = 35$ olduğundan

$$\begin{aligned} -a_1 - 2d &= -11 \\ + \quad a_1 + 8d &= 35 \\ \hline 6d &= 24 \end{aligned}$$

$d = 4$ ve $a_1 + 2 \cdot 4 = 11$

$a_1 = 3$ bulunur.

$a_{15} = a_1 + 14d = 3 + 14 \cdot 4 = 59$ elde edilir.

II. Yol

$a_n = a_p + (n - p)d$ bağıntısı kullanılırsa

$a_9 = a_3 + (9 - 3)d$

$35 = 11 + 6d$

$d = 4$ bulunur.

$a_{15} = a_9 + (15 - 9)d$

$a_{15} = 35 + 6 \cdot 4 = 59$ bulunur.

2. Bir $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ sonlu aritmetik dizisinde baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimlerin toplamı birbirine eşittir. (a_n) aritmetik dizisinde $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = ...$ olur.

$$\begin{aligned} a_1 + a_n &= a_1 + a_1 + (n-1)d = 2a_1 + (n-1)d \\ a_2 + a_{n-1} &= a_1 + d + a_1 + (n-2)d = 2a_1 + (n-1)d \\ a_3 + a_{n-2} &= a_1 + 2d + a_1 + (n-3)d = 2a_1 + (n-1)d \\ &\vdots \end{aligned}$$

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = ...$ olduğu görülür.

30. ÖRNEK

(a_n) sonlu aritmetik dizisinde $a_2 + a_{14} = 38$ ise $a_5 + a_{11}$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$a_2 + a_{14} = a_1 + d + a_1 + 13d = 2a_1 + 14d = 38$

$a_5 + a_{11} = a_1 + 4d + a_1 + 10d = 2a_1 + 14d$ olur.

$a_5 + a_{11} = 38$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 13 — Bireysel Çalışma

Bir aritmetik dizinin ilk üç terimi $a,\ 2a + 3,\ 4a - 1$ olduğuna göre dizinin 10. terimini bulunuz.

3. (a_n) **aritmetik dizisinde** $p \in \mathbb{Z}^+$ **ve** $1 < p < n$ **olmak üzere bir aritmetik dizide herhangi bir terim, kendisine eşit uzaklıktaki terimlerin aritmetik ortalamasına eşittir. Buradan** $a_n = \dfrac{a_{n-p} + a_{n+p}}{2}$ **olur.**

$a_{n-p} + a_{n+p} = a_1 + (n - p - 1)d + a_1 + (n + p - 1)d$

$a_{n-p} + a_{n+p} = 2a_1 + nd - pd - d + nd + pd - d$

$a_{n-p} + a_{n+p} = 2a_1 + 2nd - 2d$

$a_{n-p} + a_{n+p} = 2a_1 + 2(n - 1)d$

$a_{n-p} + a_{n+p} = 2(a_1 + (n - 1)d)$

$a_{n-p} + a_{n+p} = 2a_n$ olur.

$a_n = \dfrac{a_{n-p} + a_{n+p}}{2}$ bulunur.

31. ÖRNEK

(a_n) aritmetik dizisinde $a_5 + a_7 = 10$ ise bu dizinin ilk 11 teriminin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$a_6 = \dfrac{a_5 + a_7}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ olur.

$a_1 + a_{11} = a_2 + a_{10} = a_3 + a_9 = a_4 + a_8 = a_5 + a_7 = 10$ olduğundan

$\sum_{k=1}^{11} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}$

$\sum_{k=1}^{11} a_k = (a_1 + a_{11}) + (a_2 + a_{10}) + (a_3 + a_9) + (a_4 + a_8) + (a_5 + a_7) + a_6$

$\sum_{k=1}^{11} a_k = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 5$

$\sum_{k=1}^{11} a_k = 55$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 14 — Bireysel Çalışma

(a_n) aritmetik dizisinin 4. terimi 13 olduğuna göre bu dizinin ilk 7 teriminin toplamını bulunuz.

32. ÖRNEK

-7 ile 25 arasına aritmetik dizi oluşturacak şekilde 7 terim yerleştiriliyor. Buna göre yerleştirilen 4. terimi bulunuz.

ÇÖZÜM

Birinci terim ile sonuncu terim arasına 7 tam sayı yerleştirildiğine göre bu sonlu aritmetik dizi 9 terimlidir.
Birinci terim $a_1 = -7$ ve sonuncu terim $a_9 = 25$ tir.
Bu sayılar arasına yerleştirilen 4. terim a_5 tir.

$$a_5 = \frac{(-7+25)}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ bulunur.}$$

4. (a_n) aritmetik dizisinin ilk n terim toplamı $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ ise
$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ olur.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n \\ + \quad S_n &= a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 \\ \hline 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \\ 2S_n &= n \cdot (a_1 + a_n) \\ S_n &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \text{ olur.} \end{aligned}$$

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_n + a_1$
n tane eşitlik vardır.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ olduğundan

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ bağıntısı elde edilir.

33. ÖRNEK

100 ile 200 arasında 4 ile bölündüğünde 1 kalanını veren tam sayıların toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

100 ile 200 arasında 4 ile bölündüğünde 1 kalanını veren sayılar 101, 105, 109, ... , 197 olduğundan bu dizi aritmetik dizi olup dizinin ortak farkı $d = 4$ ve $a_1 = 101$ olur.

$$\text{Terim sayısı} = \frac{\text{Son terim} - \text{İlk terim}}{\text{Artış miktarı}} + 1 = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{197 - 101}{4} + 1 = 25 \text{ bulunur.}$$

$S_{25} = 101 + 105 + 109 + ... + 197$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{25} = \frac{25}{2}(101 + 197) = 3725$ elde edilir.

34. ÖRNEK

Genel terimi $a_n = 3n - 4$ olan aritmetik dizinin ilk n teriminin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Yol

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ dir.

$a_1 = 3 \cdot 1 - 4$

$a_2 = 3 \cdot 2 - 4$

$a_3 = 3 \cdot 3 - 4$

$\vdots$

$+\ a_n = 3 \cdot n - 4$

$S_n = 3 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + n) - 4 \cdot n$

$S_n = 3 \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - 4n$

$S_n = \frac{3n^2 - 5n}{2}$ bulunur.

II. Yol

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ ve

$a_1 = 3 \cdot 1 - 4 = -1$ olmak üzere

$S_n = \frac{n}{2}(-1 + 3n - 4)$

$S_n = \frac{n}{2}(3n - 5)$

$S_n = \frac{3n^2 - 5n}{2}$ bulunur.

35. ÖRNEK

İlk n teriminin toplamı $S_n = n^2 + 3n$ olan bir (a_n) aritmetik dizisinde $a_{15} + a_{16}$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$S_{14} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{13} + a_{14}$

$S_{16} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16}$

$S_{16} - S_{14} = a_{15} + a_{16}$ bulunur.

$a_{15} + a_{16} = S_{16} - S_{14}$

$= (16^2 + 3 \cdot 16) - (14^2 + 3 \cdot 14)$

$= 304 - 238$

$= 66$ olur.

36. ÖRNEK

İlk n teriminin toplamı $S_n = 4n^2 - n$ olan bir aritmetik dizinin genel terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Yol

$a_1 = S_1 = 4 \cdot 1^2 - 1 = 3$

$a_1 + a_2 = S_2 = 4 \cdot 2^2 - 2 = 14$

$a_1 + (a_1 + d) = 14$

$2a_1 + d = 14$

$2 \cdot 3 + d = 14$

$d = 8$ olur.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 8 = 8n - 5$ bulunur.

II. Yol

$S_n = 4n^2 - n$ ifadesinde n yerine $n - 1$ yazılırsa

$S_{n-1} = 4(n - 1)^2 - (n - 1)$

$S_{n-1} = 4(n^2 - 2n + 1) - (n - 1)$

$S_{n-1} = 4n^2 - 8n + 4 - n + 1$

$S_{n-1} = 4n^2 - 9n + 5$ olur.

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$a_n = (4n^2 - n) - (4n^2 - 9n + 5)$

$a_n = 4n^2 - n - 4n^2 + 9n - 5$

$a_n = 8n - 5$ bulunur.

37. ÖRNEK

Üniversite sınavına hazırlanan Serdar, her gün bir önceki günden 5 fazla soru çözüyor. İlk gün 50 soru çözen Serdar'ın 90 gün sonra toplam kaç soru çözdüğünü bulunuz.

ÇÖZÜM

1. gün $a_1 = 50$
2. gün $a_2 = 50 + 5 \cdot 1$
3. gün $a_3 = 50 + 5 \cdot 2$

$\vdots$

n. gün $a_n = 50 + 5 \cdot (n - 1)$

90. gün $a_{90} = 50 + 5 \cdot 89 = 495$ olur.

Serdar'ın 90. günün sonunda çözdüğü toplam soru sayısı

$S_{90} = \frac{90}{2}(a_1 + a_{90}) \Rightarrow S_{90} = 45(50 + 495) \Rightarrow S_{90} = 45 \cdot 545 = 24\,525$ bulunur.

38. ÖRNEK



A ve B şehirlerinden birbirine doğru aynı anda yola çıkan iki motosikletlinin hızları sırasıyla $V_1 = 15$ km/sa. ve $V_2 = 20$ km/sa. tir. Hızı V_1 olan motosikletli hızını her saatin sonunda 5 km/sa. ve hızı V_2 olan motosikletli hızını her saatin sonunda 4 km/sa. artırarak hareket etmektedir.

A ve B şehirleri arası 755 km olduğuna göre motosiklet sürücülerinin kaç saat sonra karşılaşacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Bu iki motosikletlinin karşılaşma anına kadar geçen süre n olmak üzere

V_1 için $a_1 = 15$ km/sa. ve $d_1 = 5$ km/sa. olur.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d_1 \Rightarrow a_n = 15 + (n - 1) \cdot 5 \Rightarrow a_n = 5n + 10$ elde edilir.

n saat sonra V_1 hızlı motosikletlinin alacağı yol $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot (5n + 25)$ km bulunur.

V_2 için $b_1 = 20$ km/sa. ve $d_2 = 4$ km/sa. olur.

$b_n = b_1 + (n - 1) \cdot d_2 \Rightarrow b_n = 20 + (n - 1) \cdot 4 \Rightarrow b_n = 4n + 16$ elde edilir.

n saat sonra V_2 hızlı motosikletlinin alacağı yol $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot (4n + 36)$ km bulunur.

Bu durumda

$$|AB| = 755$$

$$\frac{n}{2} \cdot (5n + 25) + \frac{n}{2} \cdot (4n + 36) = 755$$

$$\frac{5n^2 + 25n}{2} + \frac{4n^2 + 36n}{2} = 755$$

$$9n^2 + 61n = 1510$$

$$9n^2 + 61n - 1510 = 0$$

$$(9n + 151)(n - 10) = 0$$

denklemi çözüldüğünde bu iki motosikletlinin $n = 10$ saat sonra karşılaştığı görülür.

Ders İçi Uygulama 15

Bireysel Çalışma

Uzmanlar sağlıklı bir yaşam sürmek için dengeli beslenmenin yanında günde 10 000 adım atılmasını öneriyor. Hareketsiz bir yaşam tarzı olan bir kişi, telefonundaki adımsayar uygulamasını kullanarak günlük yürüyüşlerine başladıktan sonra her günün sonunda attığı adım sayısını aşağıda verilen tablodaki gibi not ediyor.

Gün	1.	2.	3.	...	n.	...	?
Atılan Adım Sayısı	2000	2500	3000	...	?	...	10 000

Buna göre

a) Terimleri bu kişinin günlük attığı adım sayısı olan dizinin genel terimini yazınız.

b) Kişinin 8. gün kaç adım attığını bulunuz.

c) Kişinin 10 000 adım hedefine kaçıncı günde ulaşacağını bulunuz.

ALIŞTIRMALAR 2.2

1. İlk terimi 4, dördüncü terimi 13 olan aritmetik dizinin kaçıncı teriminin 52 olduğunu bulunuz.

2. Genel terimi $a_n = 3n + 2$ **olan dizinin ilk 8 teriminin toplamını bulunuz.**

3. Bir aritmetik dizinin ilk üç terimi $a, 2a - 1, 4a + 1$ **olduğuna göre onuncu teriminin kaç olduğunu bulunuz.**

4. 7 ile 13 sayıları arasına aritmetik dizi oluşturacak şekilde 19 tane daha terim yerleştiriliyor.

Yerleştirilen terimlerin en küçüğünün kaç olduğunu bulunuz.

5. $(a_n) = ((x-2)n^2 + nx + x + 3)$ **dizisi bir aritmetik dizi olduğuna göre** a_7 **değerini bulunuz.**

6. (a_n) **aritmetik dizi,** $a_1 + a_5 - a_3 = 10$ **ve** $a_2 + a_3 = 17$ **ise** a_{20} **değerini bulunuz.**

7. $(a_n) = (2n - 3)$ **aritmetik dizisinin ilk n teriminin toplamını bulunuz.**

8. (a_n) aritmetik dizisinde ilk n terimin toplamı S_n dir.

$S_{18} - S_{14} = 20$ ve $S_{40} - S_{36} = 64$ **olduğuna göre bu dizinin ortak farkını bulunuz.**

9. Bir aritmetik dizide ilk 5 terimin toplamı 65, ilk 9 terimin toplamı 180 olduğuna göre bu dizinin ilk teriminin kaç olduğunu bulunuz.

10. Bir dik üçgenin kenar uzunlukları aritmetik dizi oluşturmaktadır.

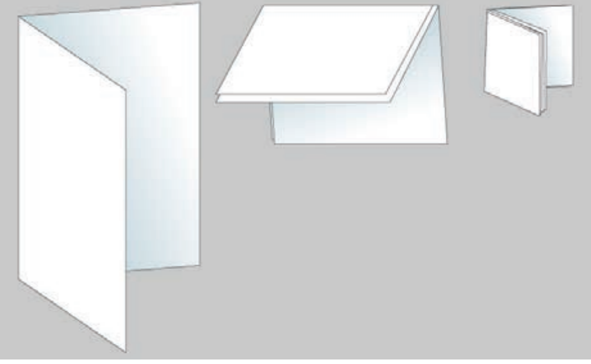
Bu dik üçgenin çevresi 24 birim olduğuna göre alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

11. Ebru ile Mert, matematik denemesine hazırlık için aynı gün soru çözmeye başlamıştır. Aşağıdaki tabloda Ebru ve Mert'in çözdüğü soru sayısını ifade eden dizinin terimleri gösterilmiştir.

Ebru ile Mert'in n. günde çözdükleri soru sayısı eşit olduğuna göre n değerini bulunuz.

	1. Gün	2. Gün	3. Gün	...	n. Gün
Ebru	6	10	14	...	
Mert	11	14	17	...	

Geometrik Dizi



Kalınlığı 1 birim olan bir kâğıt, görseldeki gibi her seferinde ikiye katlanmaktadır. Her adımda oluşan dikdörtgen şeklindeki kâğıdın kalınlığı (a_n) dizisinin terimleri olmak üzere

$a_1 = 1$

$a_2 = 2$

$a_3 = 2^2$

$\vdots$

$a_n = 2^{n-1}$

$(a_n) = (1, 2, 4, 8, ...2^{n-1}, ...)$

biçiminde elde edilir.

Bu şekilde oluşturulan (a_n) dizisinin 5. terimini bulunuz.

Bilgi

Bir (a_n) dizisinde her $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $a_n \neq 0$ olmak üzere $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{R}$ varsa (a_n) dizisine **geometrik dizi,** r sayısına da bu dizinin **ortak çarpanı** veya **ortak oranı** denir.

(a_n) geometrik bir dizi olsun. Bu dizide

$$\frac{a_2}{a_1} = r \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot r$$

$$\frac{a_3}{a_2} = r \Rightarrow a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$$

$$\frac{a_4}{a_3} = r \Rightarrow a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r \Rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1} \text{ olur.}$$

(a_n) dizisi $(a_n) = (a_1, a_1 \cdot r, a_2 \cdot r^2, ..., a_1 \cdot r^{n-1}, ...)$ olur.

(a_n) dizisinin genel terimi $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ şeklinde bulunur.

39. ÖRNEK

İlk terimi 4 ve ortak çarpanı 2 olan geometrik dizinin 5. terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$a_1 = 4$, $r = 2$ ve $a_5 = a_1 \cdot r^4$ olduğundan

$a_5 = 4 \cdot 2^4$

$a_5 = 2^2 \cdot 2^4$

$a_5 = 2^6$ bulunur.

40. ÖRNEK

$(3, 15, 75, 375, \ldots)$ biçiminde verilen geometrik dizinin genel terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

(a_n) geometrik dizi olduğundan (a_n) dizisinin ortak çarpanı

$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$r = \frac{15}{3} = \frac{75}{15} = \frac{375}{75} = 5$ olarak bulunur.

Dizinin genel terimi $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 3 \cdot 5^{n-1} = \frac{3}{5} \cdot 5^n$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 16 — Bireysel Çalışma

Aşağıdaki tabloda Hamdi Bey'in son beş yılda aldığı ocak ayı maaşları gösterilmiştir.

Yıl	2018 Ocak	2019 Ocak	2020 Ocak	2021 Ocak	2022 Ocak
Maaş	2000	3000	4500	6750	10 125

Buna göre Hamdi Bey'in her yıl ocak ayında aldığı maaş (a_n) dizisinin terimleri olmak üzere bu dizinin ardışık terimleri arasındaki oranı bulunuz.

Geometrik Dizinin Özellikleri

1. (a_n) geometrik dizisinde $1 \leq k < n$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere ortak çarpan r ise $a_n = a_k \cdot r^{n-k}$ bağıntısı vardır.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ ve $a_k = a_1 \cdot r^{k-1}$ eşitlikleri taraf tarafa bölünürse

$\frac{a_n}{a_k} = \frac{a_1 \cdot r^{n-1}}{a_1 \cdot r^{k-1}} = r^{n-k}$ olduğundan $a_n = a_k \cdot r^{n-k}$ bulunur.

41. ÖRNEK

(a_n) geometrik dizisinin 3. terimi 18, 6. terimi 486 olduğuna göre 10. terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Yol

$a_n = a_k \cdot r^{n-k} \Rightarrow a_6 = a_3 \cdot r^{6-3} \Rightarrow 486 = 18 \cdot r^3 \Rightarrow 27 = r^3 \Rightarrow r = 3$ olur.

$a_{10} = a_3 \cdot r^7 \Rightarrow a_{10} = 18 \cdot 3^7 \Rightarrow a_{10} = 2 \cdot 3^9$ bulunur.

II. Yol

$a_6 = a_1 \cdot r^5$ ve $a_3 = a_1 \cdot r^2$ olduğundan

$\frac{a_6}{a_3} = \frac{a_1 \cdot r^5}{a_1 \cdot r^2} \Rightarrow \frac{486}{18} = r^3 \Rightarrow 27 = r^3 \Rightarrow r = 3$ olur.

$a_3 = a_1 \cdot r^2 \Rightarrow 18 = a_1 \cdot 3^2 \Rightarrow a_1 = 2$ olur.

$a_{10} = a_1 \cdot r^9 = 2 \cdot 3^9$ bulunur.

2. Bir geometrik dizide her terim kendisine eşit uzaklıktaki terimlerin geometrik ortalamasına eşittir. $k < p$ için $a_p = \sqrt{a_{p-k} \cdot a_{p+k}}$ olur.

$a_{p-k} \cdot a_{p+k} = a_1 \cdot r^{p-k-1} \cdot a_1 \cdot r^{p+k-1}$

$a_{p-k} \cdot a_{p+k} = a_1^2 \cdot r^{2p-2}$ olur.

$\sqrt{a_{p-k} \cdot a_{p+k}} = a_1 \cdot r^{p-1} \Rightarrow \sqrt{a_{p-k} \cdot a_{p+k}} = a_p$ bulunur.

42. ÖRNEK

(a_n) geometrik dizi olmak üzere $a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 = \frac{1}{32}$ ise a_5 değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sqrt{a_3 \cdot a_7} = \sqrt{a_4 \cdot a_6} = a_5$ olduğundan

$a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 = \frac{1}{32}$

$(a_3 \cdot a_7) \cdot (a_4 \cdot a_6) \cdot a_5 = \frac{1}{32}$

$(a_5)^2 \cdot (a_5)^2 \cdot a_5 = \frac{1}{32}$

$\left(\sqrt{a_4 \cdot a_6}\right)^2 = a_5^2$

$\left(\sqrt{a_3 \cdot a_7}\right)^2 = a_5^2$

$(a_5)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{2}$ bulunur.

3. Sonlu bir geometrik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimlerin çarpımı birbirine eşittir. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ geometrik dizisinde
$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = ... = a_k \cdot a_{n-k+1} = ...$ bulunur.

$a_1 \cdot a_n = a_1 \cdot a_1 \cdot r^{n-1}$
$= a_1^2 \cdot r^{n-1}$

$a_2 \cdot a_{n-1} = a_1 \cdot r \cdot a_1 \cdot r^{n-2}$
$= a_1^2 \cdot r^{n-1}$

$a_3 \cdot a_{n-2} = a_1 \cdot r^2 \cdot a_1 \cdot r^{n-3}$
$= a_1^2 \cdot r^{n-1}$

$\vdots$

$a_k \cdot a_{n-k+1} = a_1 \cdot r^{k-1} \cdot a_1 \cdot r^{n-k+1-1}$
$= a_1^2 \cdot r^{n-1}$ bulunur.

$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = ... = a_k \cdot a_{n-k+1} = ...$ elde edilir.

43. ÖRNEK

81 ve $\frac{1}{9}$ sayıları arasına sonlu geometrik dizi oluşturacak şekilde 5 terim yerleştiriliyor. Yerleştirilen bu 5 terimin çarpımını bulunuz.

ÇÖZÜM

Terimleri (81, p, q, r, s, t, $\frac{1}{9}$) olan (a_n) geometrik dizisinde

$a_1 = 81,\ a_2 = p,\ a_3 = q,\ a_4 = r,\ a_5 = s,\ a_6 = t,\ a_7 = \frac{1}{9}$ olur.

$a_4 = \sqrt{a_1 \cdot a_7} = \sqrt{a_2 \cdot a_6} = \sqrt{a_3 \cdot a_5}$

$r = \sqrt{81 \cdot \frac{1}{9}} = \sqrt{p \cdot t} = \sqrt{q \cdot s}$

$r = 3$

$p \cdot t = q \cdot s = 9$

$p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot t = (p \cdot t) \cdot (q \cdot s) \cdot r = 9 \cdot 9 \cdot 3 = 243$ bulunur.

4. Birinci terimi a_1 ve ortak çarpanı r olan bir (a_n) geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamı $r \neq 1$, $S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$ olur.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

$S_n = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + ... + a_1 \cdot r^{n-1}$

eşitliğinin her iki tarafı r ile genişletilirse $r \cdot S_n = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + ... + a_1 \cdot r^n$ bulunur.

$$\begin{array}{rl} S_n = & a_1 + a_1 \cdot r + ... + a_1 \cdot r^{n-1} \\ - \; r \cdot S_n = & a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + ... + a_1 \cdot r^n \\ \hline S_n - r \cdot S_n = & a_1 - (a_1 \cdot r^n) \end{array}$$

$S_n(1-r) = a_1 \cdot (1-r^n)$

$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$ bulunur.

44. ÖRNEK

$\left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$(a_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ geometrik dizi ve $r = \frac{1}{3}$ olduğundan

$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$

$S_{10} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{10} - 1}{3^{10}}$ bulunur.

45. ÖRNEK

Bir geometrik dizinin ilk 8 teriminin toplamının ilk 4 teriminin toplamına oranı 82 ise bu dizinin ortak çarpanını bulunuz.

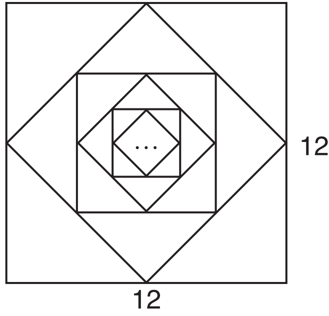
ÇÖZÜM

Geometrik dizi (a_n) olsun. İlk 8 terimin toplamı S_8 ve ilk 4 terimin toplamı S_4 olmak üzere

$\frac{S_8}{S_4} = 82$

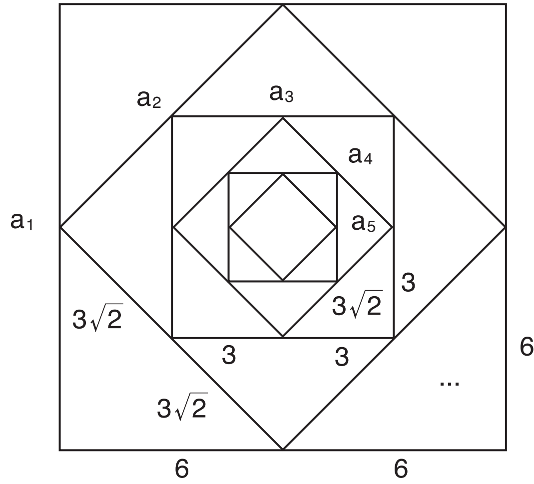
$\frac{a_1 \cdot \frac{1-r^8}{1-r}}{a_1 \cdot \frac{1-r^4}{1-r}} = 82 \Rightarrow \frac{1-r^8}{1-r^4} = 82 \Rightarrow \frac{(1-r^4)(1+r^4)}{1-r^4} = 82 \Rightarrow r^4 = 81 \Rightarrow r = 3$ bulunur.

46. ÖRNEK



Yandaki şekilde bir kenar uzunluğu 12 birim olan karenin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek başka bir kare çizilmiş; oluşan kareye de aynı işlem uygulanmış ve bu şekilde devam edilmiştir. Ortaya çıkan ilk 9 karenin alanları toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM



1. karenin bir kenar uzunluğu $a_1 = 12$ birim, alanı $A_1 = 12^2 = 144$ birimkare,
2. karenin bir kenar uzunluğu $a_2 = 6\sqrt{2}$ birim, alanı $A_2 = (6\sqrt{2})^2 = 72$ birimkare,
3. karenin bir kenar uzunluğu $a_3 = 6$ birim, alanı $A_3 = 6^2 = 36$ birimkare,
4. karenin bir kenar uzunluğu $a_4 = 3\sqrt{2}$ birim, alanı $A_4 = (3\sqrt{2})^2 = 18$ birimkare olduğundan ve karelerin alanları oranı $\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_3}{A_2} = \frac{A_4}{A_3} = r$ olduğundan (A_n) geometrik dizisinin terimleridir.

$r = \frac{A_2}{A_1} = \frac{72}{144} = \frac{1}{2}$ ve ilk 9 karenin alanları toplamı

$S_9 = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_9$ olacaktır.

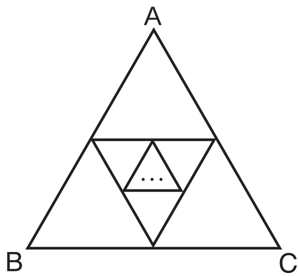
$$S_9 = A_1 \cdot \frac{1 - r^9}{1 - r}$$

$$= 144 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 144 \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^9}\right) = 288 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^9}\right) \text{ birimkare bulunur.}$$

Ders İçi Uygulama 17

Bireysel Çalışma



Yanda bir kenarının uzunluğu 6 birim olan ABC eşkenar üçgeni verilmiştir. Bu üçgende kenarların orta noktaları birleştirilerek oluşturulan ilk 10 eşkenar üçgenin alanları toplamını bulunuz.



Ders İçi Uygulama 18

Bireysel Çalışma

Fotoğrafçılığa merak salan Özge, yeni aldığı makinesini deneyebilmek için seçtiği sabit bir cismin fotoğrafını önce 100 metre uzaktan çekmiştir. Sonraki çekimlerde makinesinin ayarlarını değiştirmeden cisme olan mesafesini bir önceki mesafesinin yarısı uzaklıkta olacak şekilde ayarlayıp her seferinde bir fotoğraf çekmiştir. Bu şekilde 10 tane fotoğraf çektikten sonra fotoğrafları incelemek için çekimi bitirmiştir.

Fotoğraf Numarası	Cisme Olan Uzaklık (m)
1.	100
2.	$\frac{100}{2}$
3.	$\frac{100}{4}$
...	...

Buna göre

a) Özge'nin her çekimde cisme olan uzaklığını terim kabul eden dizinin genel terimini yazınız.

b) 5. fotoğrafı çektiğinde Özge'nin cisme olan uzaklığının kaç metre olduğunu bulunuz.

c) Özge 1 metreden daha yakın olan çekimlerinde fotoğraf kalitesinin düştüğünü görmüştür. Fotoğraf kalitesi düşen ilk fotoğrafın hangisi olduğunu bulunuz.

1. **Bir geometrik dizinin ikinci terimi $\frac{3}{2}$ ve dördüncü terimi $\frac{2}{3}$ olduğuna göre altıncı terimini bulunuz.**

2. Bir geometrik dizinin ilk üç teriminin toplamı 39 dur.

$a_{n+1} = 3 \cdot a_n$ **olduğuna göre bu dizinin beşinci terimini bulunuz.**

3. $xy \neq 0$ **olmak üzere ardışık üç terimi** $x + y,\ 4xy,\ x^2y$ **olan dizinin hem aritmetik hem geometrik dizi olabilmesi için y değerini bulunuz.**

4. 4 ile 512 sayıları arasına geometrik dizi oluşturacak şekilde 6 sayı daha yerleştirildiğinde bu dizinin ortak çarpanının kaç olduğunu bulunuz.

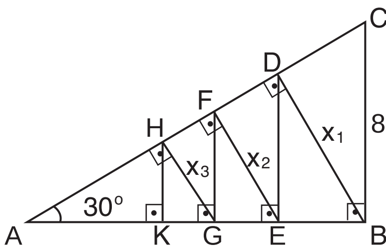
5. Aşağıdaki toplamları bulunuz.

a) $15 - 30 + 60 - ... + 960$

b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - ... + \frac{1}{512}$

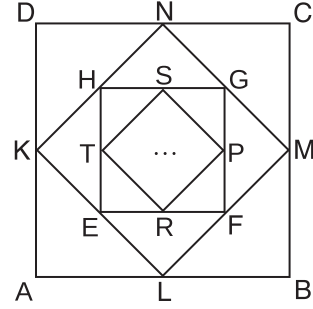
c) $4 + \frac{16}{5} + \frac{64}{25} + ... + \frac{2^{20}}{5^9}$

6.



Şekilde verilen bilgilere göre $\sum_{i=1}^{10} x_i$ **değerini bulunuz.**

7.



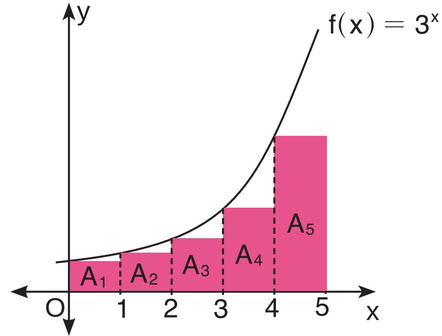
Kenar uzunluğu 8 birim olan ABCD karesinin orta noktaları (K, L, M, N) birleştirilerek yukarıdaki KLMN karesi elde ediliyor. Oluşan yeni karelere de aynı işlemler uygulanarak EFGH, TRPS, ... kareleri elde ediliyor.

Buna göre

a) Oluşan onuncu karenin bir kenar uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

b) İlk on karenin alanları toplamının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

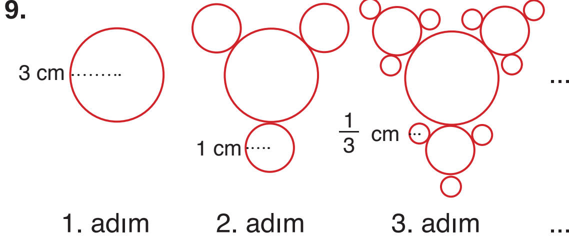
8.



Yukarıdaki grafikte bir köşesi $y = 3^x$ doğrusu üzerinde ve tabanları x ekseni ile çakışık dikdörtgenler verilmiştir.

A_1, A_2, A_3, A_4 **ve** A_5 **içerisinde bulundukları taralı bölgelerin alanları olduğuna göre** $\sum_{k=1}^{5} A_k$ **değerini bulunuz.**

9.



Yukarıda 1. adımdaki çemberin yarıçap uzunluğu 3 cm'dir. Sonraki her adımda yeni eklenen çemberlerin yarıçap uzunluğu eklendikleri çemberin yarıçap uzunluğunun $\frac{1}{3}$ ü kadardır.

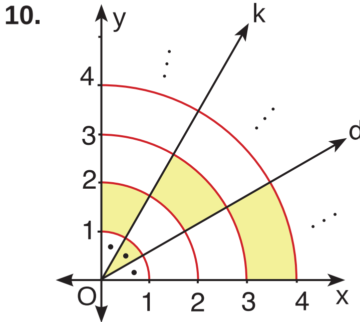
Buna göre

a) n. adımdaki çember sayısını veren ifadeyi bulunuz.

b) 4. adımdaki en küçük çemberlerin alanları toplamının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

c) 8. adıma kadar toplam kaç adet çember çizildiğini bulunuz.

10.



Şekilde verilen k ve d ışınları koordinat sisteminde I. bölgeyi 3 eş parçaya ayırmıştır. n, merkezi orijinde olacak şekilde çizilen çeyrek çemberlerin x eksenini kestiği noktanın apsisidir.

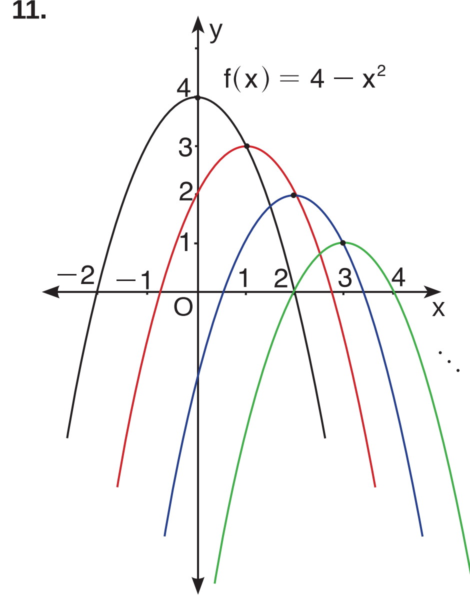
Buna göre

a) Çizilen çeyrek çemberlerin herhangi birinin çevresinin uzunluğunu veren $(ç_n)$ dizisinin genel terimini bulunuz.

b) Orijinden dışa doğru olacak şekilde taralı bölgelerin herhangi birinin alanını veren (A_n) dizisinin genel terimini bulunuz.

c) $\sum_{n=1}^{10} A_n$ değerini bulunuz.

11.



Baş katsayısı −1 ve tepe noktasının koordinatları T(r, k) olan parabolün genel denklemi $f(x) = -1 \cdot (x-r)^2 + k$ şeklindedir.

Yukarıda $f(x) = 4 - x^2$ denkleminin grafiğinin tepe noktası 1 birim sağa ve 1 birim aşağı ötelenerek yeni grafikler elde ediliyor.

Buna göre

a) Bu grafikleri temsil eden (f_n) dizisinin genel terimini bulunuz.

b) Çizilen 8. grafiğin denklemini bulunuz.

c) Farklı iki gerçek kökü bulunan grafiklerin kökler toplamını temsil eden sonlu (t_n) dizisinin terimlerini bulunuz.

Dizilerin Gerçek Hayat Durumları İle İlgili Problemler

Fibonacci Dizisi



Görsel 2.1
Leonardo Fibonacci (Temsilî)

Leonardo Fibonacci (Liyonardo Fibonaçi) "Liber Abaci" adlı kitabıyla Avrupa'ya ondalık sayı sistemini ve Arap rakamlarını tanıtan İtalyan matematikçidir.

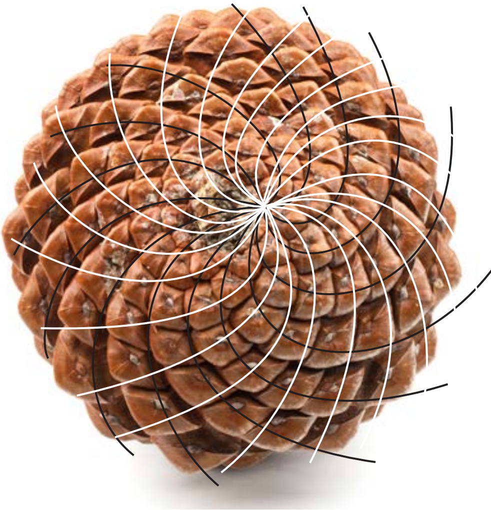
Leonardo Fibonacci'nin keşfettiği Fibonacci dizisine göre her terim kendisinden önce gelen terimle toplandığında bir sonraki terim elde edilir.

Fibonacci dizisi $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ ve $n > 1$ için $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ biçiminde tanımlanır.

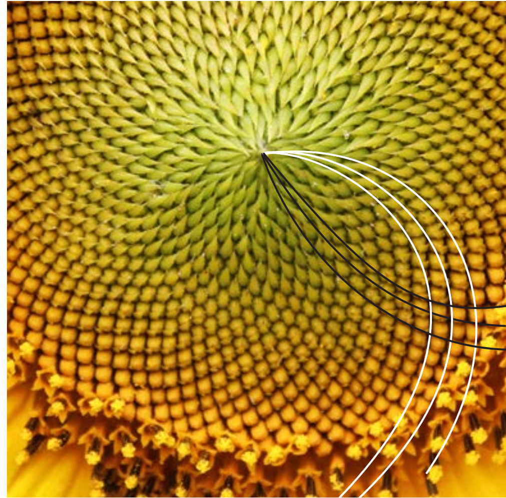
Buradan Fibonacci dizisi $(F_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...)$ şeklinde elde edilir.

Fibonacci dizisinin genel terimi ise $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ biçimindedir.

Fibonacci dizisinde ardışık terimlerin oranı altın oran olan $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618\ldots$ sayısına yaklaşır. Örneğin $\frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1{,}625$ ve $\frac{F_{13}}{F_{12}} = \frac{233}{144} = 1{,}6180\overline{5}$ olur.



Görsel 2.2: Çam kozalağı



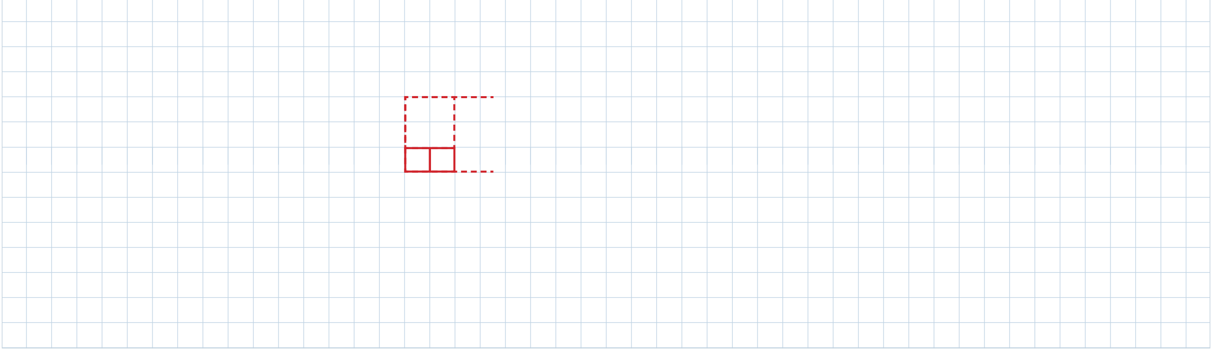
Görsel 2.3: Ayçiçeği

Yukarıdaki Görsel 2.2'de çam kozalağı tanelerinin oluşturduğu siyah renkli spirallerin sayısı 13, beyaz renkli spirallerin sayısı 21 dir. Bu sayılar Fibonacci dizisindeki ardışık terimlerdir.

Yukarıdaki Görsel 2.3'de ayçiçeği tanelerinin oluşturduğu siyah renkli spirallerin sayısı 55, beyaz renkli spirallerin sayısı 34'tür. Bu sayılar Fibonacci dizisindeki ardışık terimlerdir.

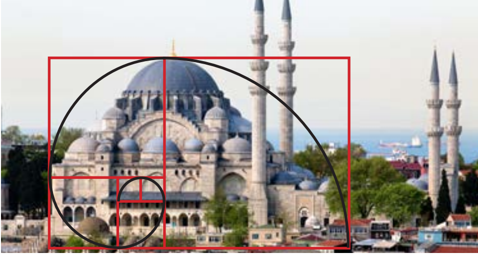
Ders İçi Uygulama 19 — Bireysel Çalışma

1. Kareli bir kağıda bir kenarının uzunluğu 1 birim olan ABCD ve BEFC karelerini bitişik olarak çiziniz. Ardından çizilen karelerin bir kenar uzunluğu daha önce çizilen karelerin birer kenar uzunluklarının toplamı olacak şekilde kareler çizmeye devam ediniz.



2. Merkezi B noktası olan AC ve CE çember yaylarını, merkezi A noktası olan EK çember yayını, merkezi D noktası olan KN çember yayını, merkezi F noktası olan NP ve merkezi L noktası olan PS çember yayını çiziniz.

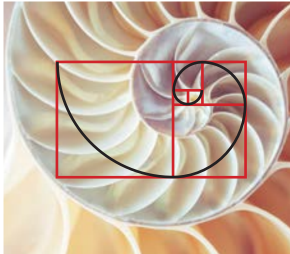




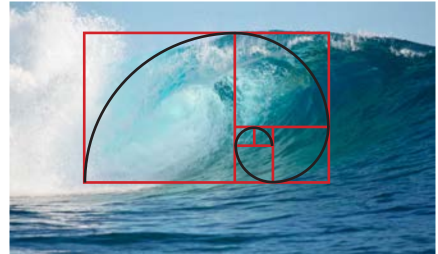
Görsel 2.4: Süleymaniye Camii



Görsel 2.5: Samanyolu



Görsel 2.6: Deniz kabuğu



Görsel 2.7: Dalga

Yukarıdaki gibi oluşan spirale **Fibonacci spirali** denir. Fibonacci spiralini içeren durumlar doğada, mimaride, sanatta karşımıza çıkmaktadır.

47. ÖRNEK

(F_n) Fibonacci dizisinin 13. terimi 233, 17. terimi 1597 olduğuna göre 14. terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$
\begin{aligned}
F_{17} &= \cancel{F_{16}} + F_{15} \\
\cancel{F_{16}} &= \cancel{F_{15}} + F_{14} \\
+\ \cancel{F_{15}} &= F_{14} + F_{13} \\
\hline
F_{17} &= F_{15} + 2F_{14} + F_{13}
\end{aligned}
$$

olur. F_{15} yerine $F_{14} + F_{13}$ yazılırsa $F_{17} = 3F_{14} + 2F_{13}$ eşitliği elde edilir.

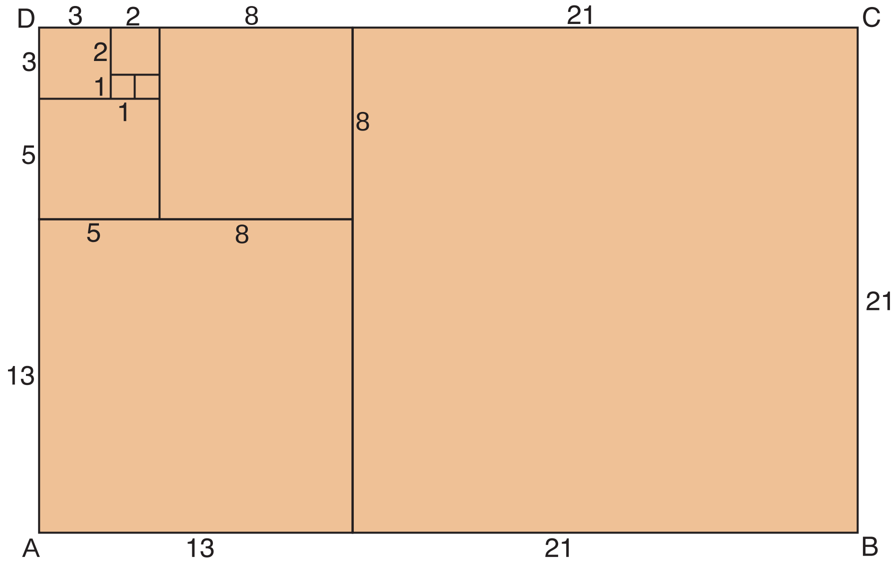
$$
\begin{aligned}
F_{17} &= 3F_{14} + 2F_{13} \\
1597 &= 3F_{14} + 2 \cdot 233 \\
3F_{14} &= 1131 \\
F_{14} &= 377 \text{ bulunur.}
\end{aligned}
$$

48. ÖRNEK

Fibonacci dizisinin ilk 8 teriminin kareleri toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 + 21^2$ toplamı aşağıdaki biçimde verilen ve kenarları Fibonacci dizisinin terimleri olan karelerin alanlarının toplamıdır.



ABCD dikdörgeninin alanı $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 + 21^2 = 21 \cdot 34 = 714$ bulunur.

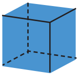
F_8 F_9

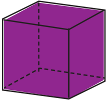
1. (F_n) **Fibonacci dizisinin kaç teriminin 100 sayısından küçük olduğunu bulunuz.**

2. … x, y, z, t, … **sayıları Fibonacci dizisinin ardışık terimleri olmak üzere** $t - 2y - x$ **değerini bulunuz.**

3. (F_n) **Fibonacci dizisinde** $F_{12} = 144$ **ve** $F_{14} = 377$ **olduğuna göre bu dizinin 13 ile 15. teriminin toplamını bulunuz.**

4. (F_n) Fibonacci dizisinin 2 ve 3. terimi sırasıyla

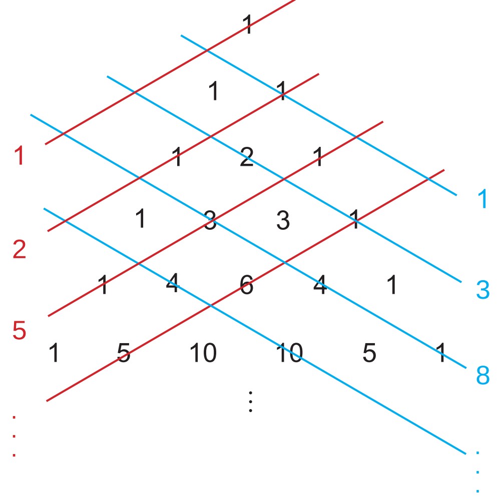

Bir ayrıtının uzunluğu 1 cm


Bir ayrıtının uzunluğu 2 cm

şeklindedir.

Buna göre bu dizinin 9. terimine kadar elde edilen küplerin tamamı üst üste konulduğunda oluşan şeklin yerden yüksekliğini bulunuz.

5. Aşağıdaki Pascal üçgeninde bir sola kırmızı, bir sağa mavi, bir sola kırmızı, bir sağa mavi ... olacak şekilde çizgiler çizilerek çizgilerin üzerinden geçtiği sayıların toplamı uçlarına yazılmıştır.



Buna göre sol tarafa yazılan 5. kırmızı sayı ile sağ tarafa yazılan 7. mavi sayının toplamını bulunuz.

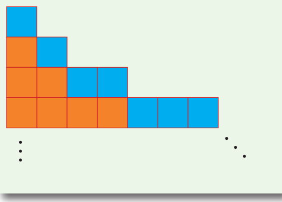
6. Bir bölgeyi yeşillendirme çalışması kapsamında fidan diken bir grup arkadaş ilk gün 12, ikinci gün 16, üçüncü gün 20 … şeklinde fidan dikerek 15 gün sonunda hedefledikleri sayıda fidanı dikmişlerdir.

Buna göre

a) 9. gün kaç adet fidan dikildiğini bulunuz.

b) Toplamda kaç adet fidan dikildiğini bulunuz.

7.



Görseldeki gibi boyanan bir kâğıtta Fibonacci dizisi oluşturan mavi kutular (a_n) ve geometrik dizi oluşturan turuncu kutular (b_n) dizisi ile ifade ediliyor.

Buna göre

a) 7. satırda kaç mavi kutunun boyandığını bulunuz.

b) 6. satırda kaç turuncu kutunun boyandığını bulunuz.

c) 8. satırda toplam kaç kutunun boyandığını bulunuz.

8. Japoncada oyuncak yapma sanatı anlamına gelen amigurumi, ami (örülmüş) ve nuigirimi (doldurulmuş oyuncak) sözcüklerinin birleşiminden oluşur. Boş vakitlerinde amigurumi tavşan örüp satarak para kazanmak isteyen Elvan nasıl yapılacağını öğrendikten sonra birinci tavşanı 29 günde, 2. tavşanı 26 günde, 3. tavşanı 23 günde örmüştür ve diğer tavşanları da bu örüntüye göre örmeye devam etmiştir.

Buna göre

a) Elvan'ın 5. tavşanı kaç günde örüp tamamladığını bulunuz.

b) Elvan'ın 11 günde ördüğü tavşanın kaçıncı tavşan olduğunu bulunuz.

c) Bir tavşan için gerekli malzemelerin maliyeti 20 liradır. Elvan bitirdiği tavşanı hemen satmaktadır. Bir tavşanı 150 liraya sattığına göre Elvan'ın 115 gün sonunda kaç lira kazandığını bulunuz.

9. $(F_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 3x + 2, 13, 21, 2x + 3y, 55, 89, 6y + 3z, \ldots)$ **Fibanocci dizisi olduğuna göre** $z - x \cdot y$ **değerini bulunuz.**

Aşağıda indirgeme bağıntısı ile verilen dizilerin ilk 5 terimini karşılarındaki boşluklara yazınız.

1.

İndirgeme Bağıntısı	İlk 5 Terimi
$a_1 = -4$, $n \geq 2$ için $a_n - a_{n-1} = 2n$	
$a_1 = \frac{5}{4}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n}$	
$a_1 = 6$ ve $a_{n+1} \cdot (n+2) = a_n \cdot (n+4)$	
$a_1 = 5$, $a_2 = -2$ ve $a_n = 2 \cdot a_{n+1} + 3 \cdot a_{n+2} - n$	
$a_5 = 17$ ve $a_{n+1} + a_n = 2n + 3$	

Aşağıdaki diziler ile karşılarında verilen genel terimlerini eşleştiriniz.

2.

	Dizi
a)	(a_n) aritmetik dizi, $a_3 = \frac{5}{2}$ ve ortak fark $d = \frac{3}{2}$
b)	(a_n) aritmetik dizi, $a_5 + a_7 = 40$ ve $a_8 - a_5 = 9$
c)	(a_n) geometrik dizi, $a_5 = 162$ ve $\frac{a_6}{a_4} = 9$
ç)	(a_n) geometrik dizi, $a_7 = 16$ ve $a_{10} = 2$
d)	(a_n) hem aritmetik hem geometrik dizi, $a_{11} = 11$

	Genel Terim
I.	$a_n = 11$
II.	$a_n = \frac{2}{3} \cdot 3^n$
III.	$a_n = 2^{11-n}$
IV.	$a_n = \frac{3n-4}{2}$
V.	$a_n = 3n + 2$
VI.	$a_n = 3n$

3-14. çoktan seçmeli soruları çözünüz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

3. **Genel terimi** $(a_n) = k(n-1) - 3n + 5$ **olan dizi sabit dizi olduğuna göre** $k \cdot a_{100}$ **değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) 6 E) 200

4. $(a_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + 5k + 6} \right)$ **dizisinin kaçıncı terimi** $\frac{8}{27}$ **olur?**

A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

5. (a_n) **dizisinde** $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$ **olduğuna göre** (a_n) **dizisinin ilk 50 teriminin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\sqrt{51}-1$

B) $\dfrac{\sqrt{51}-1}{2}$

C) $\sqrt{51}+5\sqrt{2}$

D) $\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{51}+\sqrt{50}-1)$

E) $5\sqrt{2}-1$

6. $(a_n)=\left(\dfrac{n^2+4n-12}{n+1}\right)$ **dizisinin kaç terimi 4 ten küçüktür?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7. (a_n) **dizisinde**

$a_{13} = 19$

$a_{n+1} - a_n = -3$

olduğuna göre a_3 **değeri kaçtır?**

A) -11 B) 41 C) -40

D) -39 E) 49

8. $(a_n)=\left(\dfrac{n^2+5n+18}{n+2}\right)$ **dizisinin kaç terimi tam sayıdır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 7

9. $A_{10} = \{1, 2, 3, 4, ..., 10\}$ ve $a_n : A_{10} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $(a_n) = \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$ sonlu dizisi tanımlanıyor.

Buna göre (a_n) **dizisinin terimleri çarpımı kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 6 D) 12 E) 60

10. Genel terimi $a_n = \dfrac{3^{n+1}}{n+3}$ olan (a_n) dizisi veriliyor.

Buna göre $(a_{n+2}) = (b_{n+7})$ **ise** b_{11} **in değeri kaçtır?**

A) 3 B) 9 C) 27 D) 81 E) 243

11. (a_n) bir aritmetik dizidir.

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = 3n^2 - n$ **olduğuna göre** $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 480 B) 240 C) 224

D) 120 E) 24

12. Geometrik bir dizinin ilk n terim çarpımı $Ç_n$ **olmak üzere** $\dfrac{Ç_7 \cdot Ç_6}{Ç_5 \cdot Ç_8} = \dfrac{4}{25}$ **olduğuna göre bu geometrik dizinin ortak çarpanının pozitif değeri kaçtır?**

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ C) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

D) 2 E) $\frac{5}{2}$

13. $(a_n) = \left(\frac{3n+11}{n+3}\right)$ **dizisinin kaç terimi** $\left[\frac{10}{3}, \frac{17}{3}\right)$ **ndadır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14. $(a_n) = (n^2 + 6n + 5)$ **dizisinin <u>en küçük</u> terimi ile** $(b_n) = (-n^2 + 4n - 1)$ **dizisinin <u>en büyük</u> teriminin toplamı kaçtır?**

A) 15 B) 9 C) 7 D) 6 E) 5

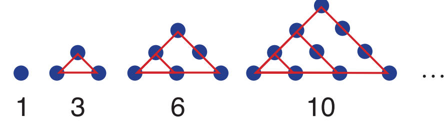
15-29. açık uçlu soruları cevaplayınız.

15. (a_n) **aritmetik dizisinde** $a_2 + a_{10} + a_{18} + a_{26} = 60$ **olduğuna göre** (a_n) **dizisinin ilk 27 teriminin toplamını bulunuz.**

16. Canan, her gün bir önceki günde çözdüğü soru sayısından 5 soru daha fazla çözmektedir.

10. günde 85 soru çözdüğüne göre Canan'ın 30 günde toplam kaç soru çözdüğünü bulunuz.

17. Aşağıdaki gibi oluşturulan üçgensel sayı dizisinin ilk 5 teriminin toplamını bulunuz.



18. (a_n) dizisi $a_1 = a_2 = 2$ ve $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ şeklinde tanımlanmıştır.

a) Bu dizinin 7. terimini bulunuz.

b) Bu dizinin ardışık üç terimi $5x$, $6x + 46$, $10x + 68$ **olduğuna göre x değerini bulunuz.**

19. $a_1 = a_2 = 2$ **ve** $n \geq 3$ **için** $a_n = n \cdot a_{n-1}$ **ise** (a_n) **dizisinin ilk 50 teriminin toplamının birler basamağındaki rakamı bulunuz.**

20. 120 ile 180 sayıları arasına bu sayılarla birlikte aritmetik dizi oluşturacak şekilde 5 terim yerleştiriliyor.

Buna göre bu dizinin ortanca terimini bulunuz.

21. $(a_n) = \left(\frac{3n - 2k}{6 - n}\right)$ **sabit dizi olduğuna göre** $k + a_{23}$ **değerini bulunuz.**

22. $a_1 = 5$ olmak üzere $a_{n+1} = a_n + 5$ indirgeme bağıntısı veriliyor.

$f(x) = 3x + 2$ **olduğuna göre** $\sum_{k=1}^{3} a_{k+1} \cdot f(k - 1)$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

23. Genel terimi $a_n = \frac{6}{n^2 + 7n + 12}$ olan dizi veriliyor.

Buna göre $\sum_{k=1}^{36} a_k$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

24. 81 ile $\frac{1}{27}$ arasına bu sayılarla birlikte geometrik dizi oluşturacak şekilde 6 terim yerleştiriliyor.

Buna göre oluşan yeni dizinin beşinci terimini bulunuz.

25. (a_n) **bir geometrik dizi olmak üzere** $a_1 \cdot a_4 = 2^{11}$ **ve** $a_5 = 2^8$ **olduğuna göre** (a_n) **dizisinin ortak çarpanı ve genel terimini bulunuz.**

26. Osman, USB belleğindeki bir dosyayı bilgisayarına aktaracaktır.

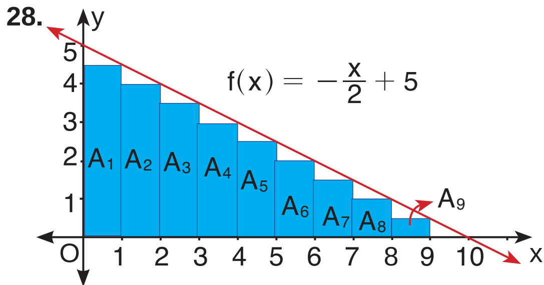
- Birinci saniye sonunda 1 megabayt bilgi aktarılmıştır.
- Her saniye sonunda bir önceki saniyede aktarılan bilginin 4 katı kadar bilgi aktarıyor.

10 saniye sonunda aktarma işlemi tamamlandığına göre dosyanın boyutunu bulunuz.

27. Antik bir amfiteatrın ilk sırasında 45 kişilik, sonraki her sırada ise bir öncekinden 4 fazla olacak şekilde oturma yeri vardır.

Seyirci kapasitesi 1660 **kişi olduğuna göre bu amfiteatrda toplam kaç sıra olduğunu bulunuz.**

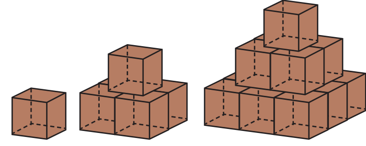
28.



Yukarıdaki grafikte bir köşesi $y = -\frac{x}{2} + 5$ doğrusu üzerinde ve tabanları x ekseni ile çakışık dikdörtgenler verilmiştir.

A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 **ve** A_9 **içerisinde bulundukları taralı bölgelerin alanları olduğuna göre** $\sum_{k=1}^{9} A_k$ **değerini hesaplayınız.**

29.



Esra öğretmen, matematik dersinde öğrencilerinden küp şeklinde ve aynı büyüklükteki tahta parçalarıyla yukarıdaki gibi tabanı kare olan yapılar oluşturmalarını istemiştir. Begüm yapısının tabanında 64, Nuri yapısının tabanında 100 tane tahta parçası kullanmıştır.

Buna göre

a) Begüm ve Nuri'nin yapılarında toplam kaç tahta parçası kullandığını bulunuz.

b) Begüm ve Nuri'nin birlikte çalışarak ellerindeki tahta parçalarıyla yapabilecekleri en büyük yapıdan geriye kaç tane tahta parçası artacağını bulunuz.

c) Begüm ve Nuri'nin birlikte yaptığı yapının ön yüzünde görünen tahta parçası sayısını bulunuz.

Daha fazla soruya ulaşmak için karekodu okutunuz



GEOMETRİ

3. TRİGONOMETRİ

3.1. TOPLAM-FARK VE İKİ KAT AÇI FORMÜLLERİ

3.2. TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

Bu Bölümde Neler Öğreneceksiniz?

Toplam-Fark ve İki Kat Açı Formülleri

- İki açının ölçüleri toplamının ve farkının trigonometrik değerlerini bulmayı,
- İki kat açı formüllerini kullanarak işlem yapmayı öğreneceksiniz.

Trigonometrik Denklemler

- Trigonometrik denklemlerin çözüm kümelerini bulmayı öğreneceksiniz.



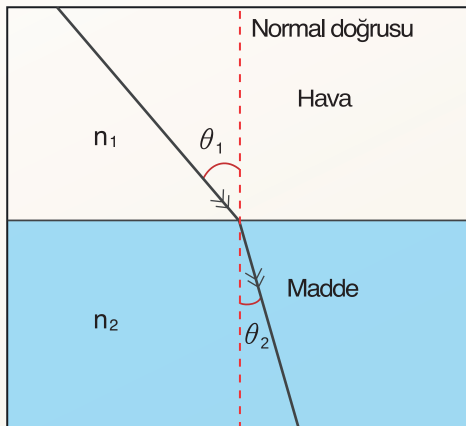
Alt öğrenme alanı karekodu

Alt öğrenme alanı sunu karekodu



Hazırlık Çalışması

Işık, bir ortamdan başka bir ortama geçerken kırılır. Suyun içindeki balıkların yüzeye yakın görülmesi, ışığın prizmadan geçerken renklere ayrılması veya gökkuşağının oluşması ışığın kırılması ile gerçekleşir. Snell (Snel) Yasası'na göre ışığın geldiği ortamdaki kırılma indisi n_1, ışığın geliş doğrultusunun normalle yaptığı açı θ_1, ışığın diğer ortamdaki kırılma indisi n_2, ışığın kırıldıktan sonraki normal doğrusu ile yaptığı açı θ_2 olmak üzere $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$ bağıntısı vardır.



Yukarıda verilen Snell Yasası'na göre

a) Yandaki şekilde ışığın geliş doğrultusunun normalle yaptığı açı 45°, ilk ortamın (hava) kırılma indisi 1, ışığın kırıldıktan sonraki normal doğrusu ile yaptığı açı 30° ise ikinci ortamın (madde) kırılma indisi bulunuz.

b) Yandaki şekilde ışığın geliş doğrultusunun normalle yaptığı açı 15°, ilk ortamın (hava) kırılma indisi 1, ışığın kırıldıktan sonraki normal doğrusu ile yaptığı açı 75° olsaydı sinüs değerleri nasıl bulunurdu? Tartışınız.

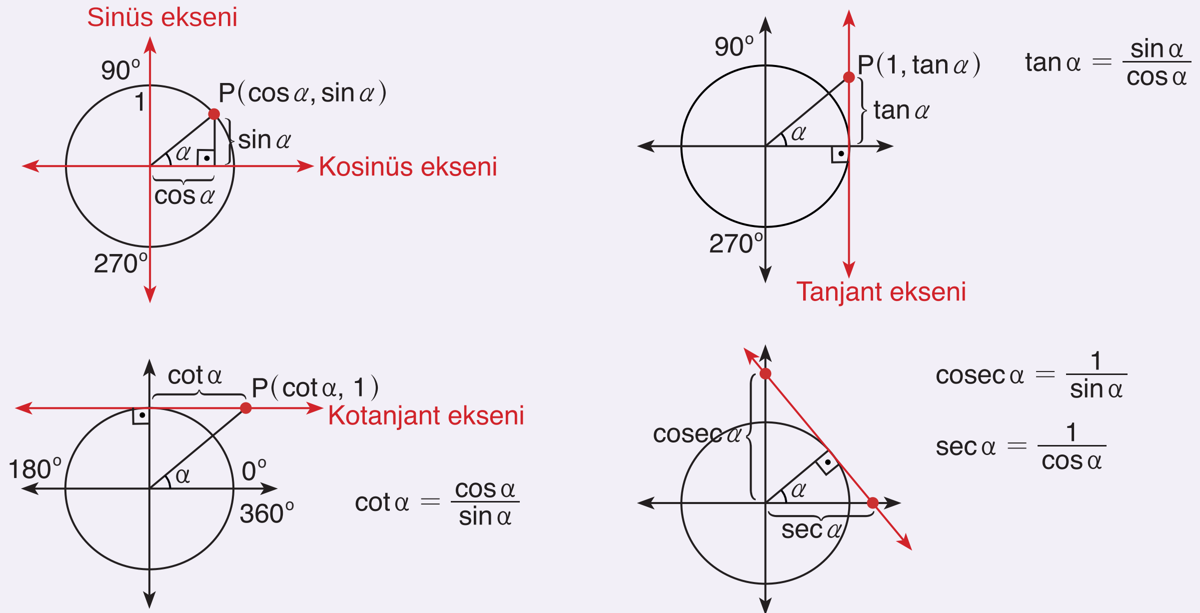
3.1. TOPLAM-FARK VE İKİ KAT AÇI FORMÜLLERİ

Toplam-Fark Formülleri

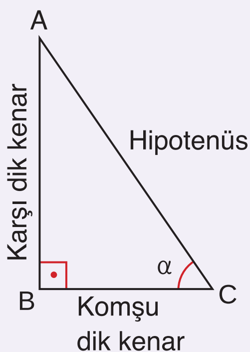
Birim çember yardımı ile $0°$, $90°$, $180°$ veya $270°$ gibi açıların trigonometrik değerleri bulunabilir. $30°$, $45°$ veya $60°$ gibi dar açıların trigonometrik değerleri dik üçgen yardımı ile hesaplanabilir. Ancak birçok problemde karşılaşılan açı ölçüleri bu değerlerden farklı olmaktadır. Örneğin $\sin(15°)$ değerini hesaplamak için $\sin(45° - 30°)$ veya $\sin(60° - 45°)$ gibi iki açının farkının sinüs değerinin hesaplanması gerekir. Bu şekilde iki açının toplamının veya farkının trigonometrik değerlerinin hesaplanabilmesini sağlayan formüller toplam-fark formülleri olarak adlandırılır. Bu formüller ile $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\tan(\alpha \pm \beta)$ veya $\cot(\alpha \pm \beta)$ biçimindeki trigonometrik değerler bulunabilir.

Hatırlatma Trigonometrik Oranlar

Analitik düzlemde birim çemberler verilmiştir.



Hatırlatma Dik Üçgende Dar AçılarınTrigonometrik Oranları

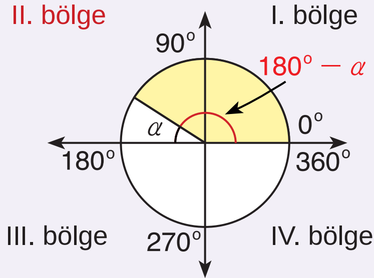


$$\sin\alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}} \qquad \cot\alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}$$

Hatırlatma — Trigonometrik Fonksiyonlar

- α dar açı, α ve β bütünler iki açı ise $\alpha + \beta = 180^\circ$ dir.



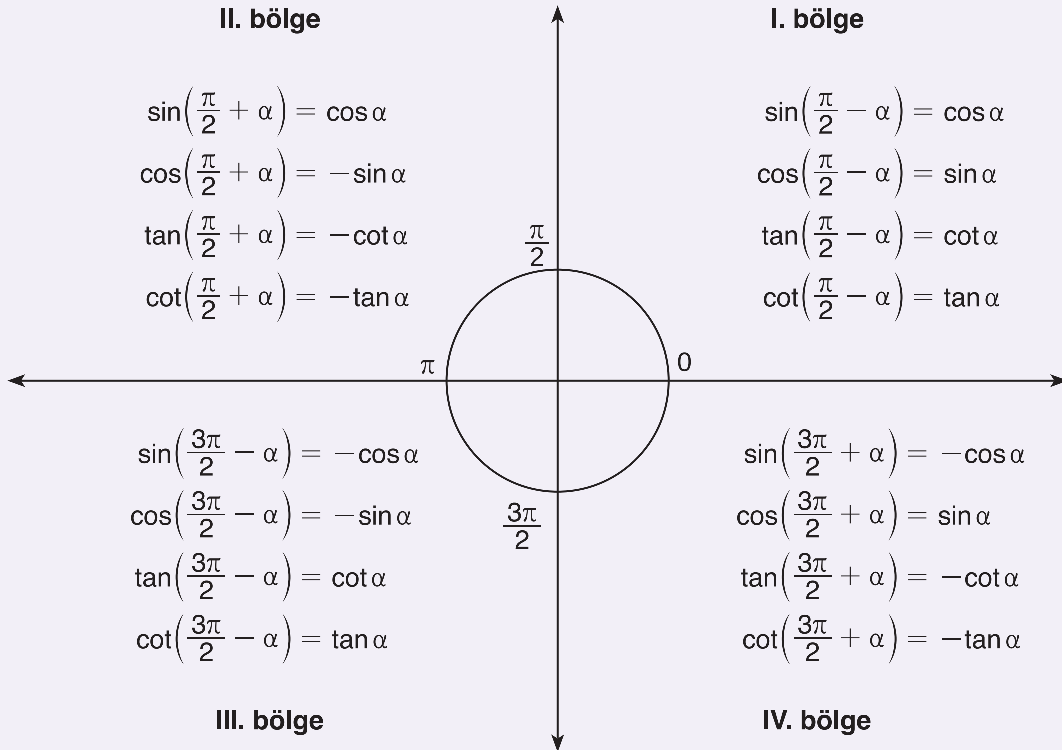
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$ $\qquad$ $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$ $\qquad$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

- α ve β tümler iki açı ise $\alpha + \beta = 90^\circ$ dir. Bu durumda $\sin\alpha = \cos\beta$ ve $\tan\alpha = \cot\beta$ olur.



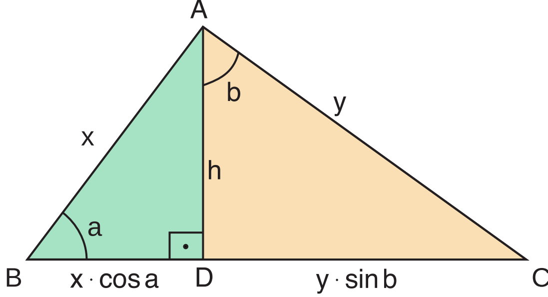
- α dar açı ise $-\alpha$ IV. bölgededir.

$\left.\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot\alpha \end{aligned}\right\}$ Sinüs, kotanjant ve tanjant fonksiyonları tek trigonometrik fonksiyonlardır.

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ olduğundan kosinüs fonksiyonu çift trigonometrik fonksiyondur.

Kosinüs İçin Toplam-Fark Formülleri

Aşağıda ABC üçgeni verilmiştir. $[AD] \perp [BC]$, D noktası $[BC]$ üzerinde, $m(\widehat{ABD}) = a$, $m(\widehat{DAC}) = b$, $|AB| = x$ ve $|AC| = y$ olmak üzere



$\sin a = \dfrac{h}{x} \Rightarrow h = x\sin a$ ve $\cos a = \dfrac{|BD|}{x} \Rightarrow |BD| = x\cos a$ eşitlikleri bulunur.

$\sin b = \dfrac{|DC|}{y} \Rightarrow |DC| = y\sin b$

$\cos b = \dfrac{h}{y} \Rightarrow h = y\cos b$ olur.

ABC üçgeninin alanı
$A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{ABD}) + A(\widehat{ADC})$ biçiminde elde edilir.
Buradan üçgende alan bağıntıları kullanılarak

$$A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{ABD}) + A(\widehat{ADC})$$

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot \sin(90^\circ - a + b) = \frac{1}{2}\cdot h\cdot x\cdot \cos a + \frac{1}{2}\cdot h\cdot y\cdot \sin b$$

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot \sin(90^\circ - (a-b)) = \frac{1}{2}\cdot y\cdot \cos b\cdot x\cdot \cos a + \frac{1}{2}\cdot x\cdot \sin a\cdot y\cdot \sin b$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}\cdot \cancel{x}\cdot \cancel{y}\cdot[\sin(90^\circ - (a-b))] = \cancel{\frac{1}{2}}\cdot \cancel{x}\cdot \cancel{y}\cdot[\cos b\cdot \cos a + \sin a\cdot \sin b]$$

$\cos(a-b) = \cos a\cdot \cos b + \sin a\cdot \sin b$ eşitliği elde edilir.

$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \sin \widehat{A}$
$= \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot \sin \widehat{B}$
$= \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin \widehat{C}$

$\cos(a-b) = \cos a\cdot \cos b + \sin a\cdot \sin b$ eşitliğinde b yerine $-b$ yazılırsa

$\cos(a-(-b)) = \cos a\cdot \cos(-b) + \sin a\cdot \sin(-b)$

$\cos(a+b) = \cos a\cdot \cos b - \sin a\cdot \sin b$

kosinüs için toplam formülü elde edilir.

$\cos(-x) = \cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$

1. ÖRNEK

$\cos(2x+65^\circ)\cdot \cos(2x+20^\circ) + \sin(2x+65^\circ)\cdot \sin(2x+20^\circ)$ ifadesinin değerini bulunuz.

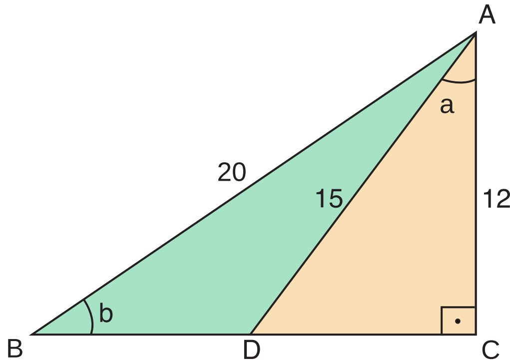
ÇÖZÜM

$\cos\underbrace{(2x+65^\circ)}_{a}\cdot \cos\underbrace{(2x+20^\circ)}_{b} + \sin\underbrace{(2x+65^\circ)}_{a}\cdot \sin\underbrace{(2x+20^\circ)}_{b} = \cos(a-b)$

$= \cos(2x + 65^\circ - 2x - 20^\circ)$

$= \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ bulunur.

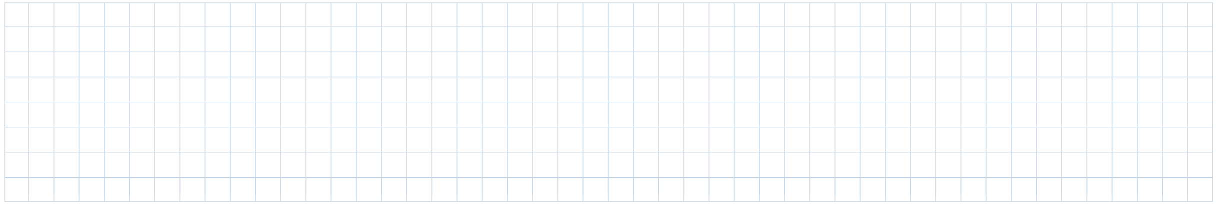
Ders İçi Uygulama 1 — Bireysel Çalışma



Yanda verilen ABC dik üçgeninde

$m(\widehat{ABD}) = b$
$m(\widehat{DAC}) = a$
$D \in [BC]$
$|AB| = 20$
$|AD| = 15$
$|AC| = 12$
$[AC] \perp [BC]$

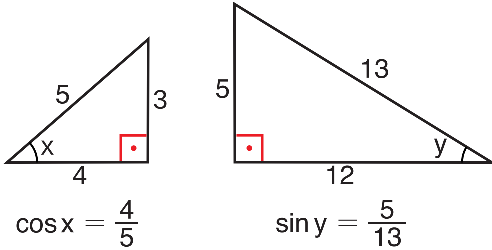
verilenlere göre $\cos(a+b)$ değerini bulunuz.



2. ÖRNEK

$x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ olmak üzere $\sin x = \frac{3}{5}$ ve $\cos y = \frac{12}{13}$ ise $\cos(x+y)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$\cos x = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\sin y = \frac{5}{13}$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$
$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13}$$
$$= \frac{33}{65} \text{ bulunur.}$$

3. ÖRNEK

Aşağıdaki trigonometrik değerleri hesaplayınız.

a) $\cos 15^\circ$

b) $\cos \frac{7\pi}{12}$

ÇÖZÜM

a) $\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ)$

$$= \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \text{ bulunur.}$$

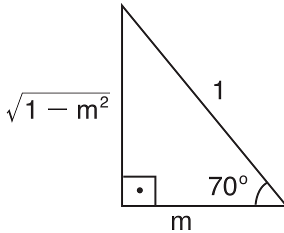
b) $\cos \frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$

$$= \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \text{ bulunur.}$$

4. ÖRNEK

$\cos 70° = m$ olmak üzere $\cos 40°$ değerinin m türünden eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM



$$\cos 40° = \cos(70° - 30°)$$
$$= \cos 70° \cdot \cos 30° + \sin 70° \cdot \sin 30°$$
$$= m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{1-m^2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3} \cdot m + \sqrt{1-m^2}}{2} \text{ bulunur.}$$

Ders İçi Uygulama 2 — Bireysel Çalışma

1. Aşağıdaki trigonometrik değerleri hesaplayınız.

a) $\cos 75°$

b) $\cos \frac{\pi}{12}$

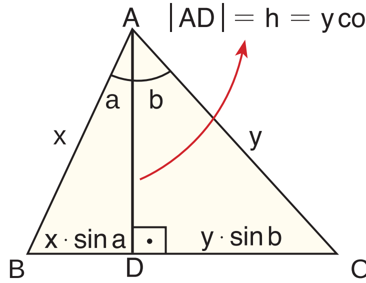
2. $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ olmak üzere $\sin x = \frac{3}{5}$ ve $\cos y = \frac{12}{13}$ ise $\cos(x + y)$ değerini bulunuz.

3. $\cos 80° = a$ olduğuna göre $\cos 125°$ nin değerini bulunuz.

4. $\tan x = \frac{5}{12}$, $\sin y = \frac{3}{5}$, x ve y dar açılar olduğuna göre $\cos(x - y)$ değerini bulunuz.

Sinüs İçin Toplam-Fark Formülleri

Aşağıda verilen ABC üçgeninde $[AD]\perp[BC]$, D noktası $[BC]$ üzerinde $m(\widehat{BAD})=a$, $m(\widehat{DAC})=b$, $|AB|=x$, $|AB|=x$ ve $|AC|=y$ olmak üzere



$$\sin a=\frac{|BD|}{x}\Rightarrow |BD|=x\sin a$$

$$\cos a=\frac{h}{x}\Rightarrow h=x\cos a$$

$$\sin b=\frac{|DC|}{y}\Rightarrow |DC|=y\sin b$$

$\cos b=\dfrac{h}{y}\Rightarrow h=y\cos b$ eşitlikleri bulunur.

$A(\widehat{ABC})=A(\widehat{ABD})+A(\widehat{ADC})$ olduğundan üçgende alan bağıntıları kullanılarak

$$A(\widehat{ABC})=A(\widehat{ABD})+A(\widehat{ADC})$$

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot\sin(a+b)=\frac{1}{2}\cdot h\cdot x\cdot\sin a+\frac{1}{2}\cdot h\cdot y\cdot\sin b$$

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot\sin(a+b)=\frac{1}{2}\cdot y\cdot\cos b\cdot x\cdot\sin a+\frac{1}{2}\cdot x\cdot\cos a\cdot y\cdot\sin b$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}\cdot\sin(a+b)=\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}\cdot[\cos b\cdot\sin a+\cos a\cdot\sin b]$$

$\sin(a+b)=\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b$ eşitliği elde edilir.

Bu eşitlik $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ özdeşliğinden yararlanılarak

$\cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b$ kosinüs fark formülünden de elde edilebilir.

$$\sin(a+b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a+b)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right)$$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cdot\cos b+\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cdot\sin b$ olur.

Buradan $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin a$ ve $\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos a$ olduğundan

$\sin(a+b)=\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b$ sinüs toplam formülü elde edilir.

Sinüs fark formülü ise sinüs toplam formülünde b yerine $(-b)$ yazılarak

$\sin(a+(-b))=\sin a\cdot\cos(-b)+\cos a\cdot\sin(-b)$

$\sin(a-b)=\sin a\cdot\cos b-\cos a\cdot\sin b$ şeklinde elde edilir.

5. ÖRNEK

$\sin 105^\circ$ trigonometrik değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ)$$
$$= \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ bulunur.}$$

6. ÖRNEK

$\sin a - \cos b = \frac{1}{3}$ ve $\cos a + \sin b = \frac{2}{3}$ ise $\sin(a - b)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{array}{l} \sin a - \cos b = \frac{1}{3} \\ \cos a + \sin b = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \text{Bu eşitliklerin her iki tarafının tam karesi alınırsa}$$

$$\sin^2 a - 2\sin a \cdot \cos b + \cos^2 b = \frac{1}{9}$$

$$\cos^2 a + 2\cos a \cdot \sin b + \sin^2 b = \frac{4}{9} \text{ olur.}$$

Bu eşitlikler taraf tarafa toplandığında $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ özdeşliğinden yararlanılarak

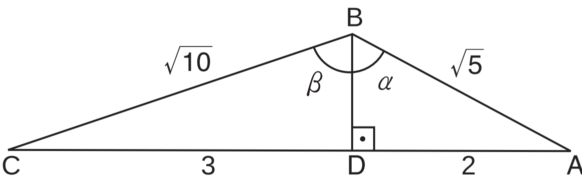
$$\underbrace{\sin^2 a + \cos^2 a}_{1} - 2\underbrace{(\sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b)}_{\sin(a-b)} + \underbrace{\cos^2 b + \sin^2 b}_{1} = \frac{5}{9}$$

$$2 - 2\sin(a - b) = \frac{5}{9}$$

$$-2\sin(a - b) = -\frac{13}{9}$$

$$\sin(a - b) = \frac{13}{18} \text{ bulunur.}$$

7. ÖRNEK



Yandaki şekilde $[BD] \perp [AC]$, D noktası $[AC]$ üzerinde

$|AB| = \sqrt{5}$ birim

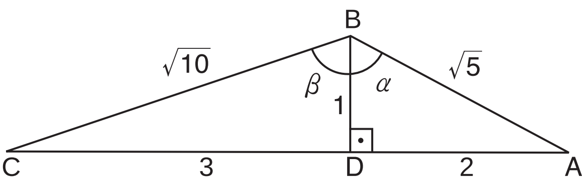
$|BC| = \sqrt{10}$ birim

$|AD| = 2$ birim

$|DC| = 3$ birimdir.

ABC üçgeni için $m(\widehat{ABC}) = \alpha + \beta$ olduğuna göre $\cos(\alpha + \beta)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}$$
$$= -\frac{5}{\sqrt{50}}$$
$$= -\frac{5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ olur.}$$

8. ÖRNEK

Özdeş küplerden oluşan yandaki şekilde α ve θ açıları verilmiştir. Buna göre $\sin(\alpha - \theta)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Yöndeş açı özelliğinden

Ters açı özelliğinden

$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ ve $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$

$\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ ve $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(\alpha - \theta) = \sin\alpha \cdot \cos\theta - \sin\theta \cdot \cos\alpha = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} - \dfrac{2}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{4}{5} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ bulunur.

9. ÖRNEK

$\dfrac{\sin 12^\circ \cdot \cos 13^\circ + \sin 13^\circ \cdot \cos 12^\circ}{\cos 40^\circ \cdot \cos 25^\circ - \sin 40^\circ \cdot \sin 25^\circ}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\dfrac{\sin 12^\circ \cdot \cos 13^\circ + \sin 13^\circ \cdot \cos 12^\circ}{\cos 40^\circ \cdot \cos 25^\circ - \sin 40^\circ \cdot \sin 25^\circ} = \dfrac{\sin(12^\circ + 13^\circ)}{\cos(40^\circ + 25^\circ)}$$

$$= \dfrac{\sin 25^\circ}{\cos 65^\circ} = \dfrac{\sin 25^\circ}{\cos(90^\circ - 25^\circ)} = \dfrac{\sin 25^\circ}{\sin 25^\circ} = 1 \text{ bulunur.}$$

$a + b = 90^\circ$ ise $\cos a = \sin b$

Ders İçi Uygulama 3

Bireysel Çalışma

1. $\sin 23^\circ \cdot \cos 97^\circ + \sin 97^\circ \cdot \cos 23^\circ$ ifadesinin değerini bulunuz.

2. $\dfrac{\cos(\alpha - \theta) + \cos(\alpha + \theta)}{\sin(\alpha + \theta) + \sin(\alpha - \theta)}$ ifadesinin en sade biçiminini bulunuz.

Tanjant ve Kotanjant İçin Toplam-Fark Formülleri

a ve b iki açı ölçüsü olmak üzere iki açının toplamının tanjantı

$\tan(a+b)=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$ ifadesi sinüs ve kosinüs toplam formülünden açılırsa

$\tan(a+b)=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\dfrac{\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b}$ olur.

Bu ifadede pay ve payda $\cos a\cdot\cos b$ ile bölünürse

$$\tan(a+b)=\dfrac{\dfrac{\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b}}{\dfrac{\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b}}$$

$$=\dfrac{\dfrac{\sin a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b}+\dfrac{\cos a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b}}{\dfrac{\cos a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b}-\dfrac{\sin a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b}}=\dfrac{\dfrac{\sin a}{\cos a}+\dfrac{\sin b}{\cos b}}{1-\dfrac{\sin a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b}}$$ bulunur.

Buradan tanjant için toplam formülü $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\cdot\tan b}$ biçiminde elde edilir.

Tanjant için fark formülü ise tanjant için toplam formülünde b yerine $-b$ yazılarak

$\tan(a+(-b))=\dfrac{\tan a+\tan(-b)}{1-\tan a\cdot\tan(-b)}$

$\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\cdot\tan b}$ elde edilir.

Benzer biçimde kotanjant için toplam ve fark formülleri

$\cot(a+b)=\dfrac{\cot a\cdot\cot b-1}{\cot a+\cot b}$ ve $\cot(a-b)=\dfrac{\cot a\cdot\cot b+1}{\cot b-\cot a}$ biçiminde elde edilir.

Kotanjant için toplam ve fark formülleri aynı zamanda

$\cot(a+b)=\dfrac{1}{\tan(a+b)}$ ve $\cot(a-b)=\dfrac{1}{\tan(a-b)}$ olur.

Bilgi

Sonuç olarak trigonometrik fonksiyonlar için toplam-fark formülleri aşağıdaki biçimde elde edilir.

- $\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b$
  $\cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b$
- $\sin(a+b)=\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b$
  $\sin(a-b)=\sin a\cdot\cos b-\cos a\cdot\sin b$
- $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\cdot\tan b}$
  $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\cdot\tan b}$
- $\cot(a+b)=\dfrac{\cot a\cdot\cot b-1}{\cot a+\cot b}$
  $\cot(a-b)=\dfrac{\cot a\cdot\cot b+1}{\cot b-\cot a}$

10. ÖRNEK

$x, y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right);\ \tan x=\frac{1}{2}$ ve $\tan y=\frac{1}{3}$ olduğuna göre $x+y$ toplamının kaç radyan olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 \text{ olur.}$$

$\tan(x+y) = 1$ ise $x + y = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ radyandır.

Ders İçi Uygulama 4 — Bireysel Çalışma

1. $\cot x = \frac{1}{3}$ ve $\tan y = 2$ olduğuna göre $x + y$ nin radyan cinsinden değerini bulunuz.

2. $\frac{\tan 2a + \tan 3a}{1 - \tan 2a \cdot \tan 3a} = 1$ ise $\cot(3a + 18^\circ)$ değerini bulunuz.

11. ÖRNEK

Yandaki d_1 ile d_2 doğruları arasındaki dar açının tanjantını bulunuz.

ÇÖZÜM

d_1 doğrusunun eğimi $m_1 = \tan\theta = 1$

d_2 doğrusunun eğimi $m_2 = \tan\beta = -2$

$$\tan\alpha = \tan(\beta - \theta)$$

$$= \frac{\tan\beta - \tan\theta}{1 + \tan\beta \cdot \tan\theta}$$

$$= \frac{-2-1}{1+(-2)\cdot 1} = \frac{-3}{-1} = 3 \text{ olur.}$$

$\alpha + \theta = \beta$

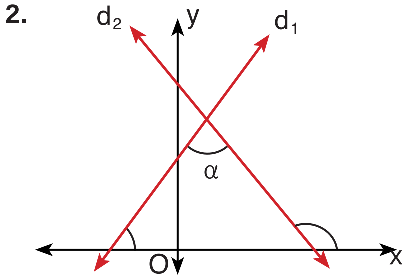
$\alpha = \beta - \theta$

Ders İçi Uygulama 5 — Bireysel Çalışma

1. Tabloda verilen ifadelerin her birinin değerini toplam-fark formüllerinden yararlanarak bulunuz.

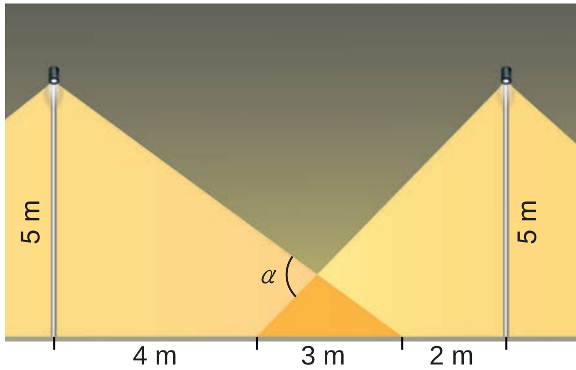
$\cos 165^\circ$		$\cot 195^\circ$	
$\sin 135^\circ$		$\sin 345^\circ$	
$\tan 105^\circ$		$\cos 285^\circ$	

2.



Analitik düzlemde
$d_1 : y_1 = m_1x + n_1$
$d_2 : y_2 = m_2x + n_2$
doğruları verildiğine göre α dar açısı için $\tan\alpha$ değerini bulunuz.

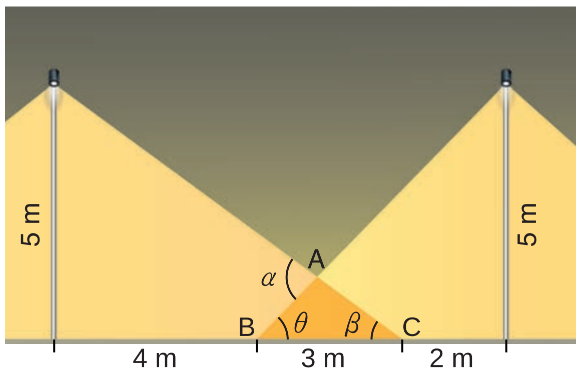
12. ÖRNEK



Yandaki görselde 5 m yükseklikteki direklere asılı ve karşılıklı olarak sokağı aydınlatan lambalar verilmiştir.

Sokak lambalarının ortak aydınlattığı kaldırım çizgisinin uzunluğu 3 m ve direkler düzlemsel yere dik olduğuna göre $\tan\alpha$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{ABC}) = \theta$ ve $m(\widehat{ACB}) = \beta$ olsun. Buradan $\alpha = \beta + \theta$ olur.

$\tan\beta = \frac{5}{7}$, $\tan\theta = \frac{5}{5} = 1$ ve

$$\tan\alpha = \tan(\beta + \theta) = \frac{\tan\beta + \tan\theta}{1 - \tan\beta \cdot \tan\theta} = \frac{\frac{5}{7} + 1}{1 - \frac{5}{7} \cdot 1} = \frac{\frac{12}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{12}{2} = 6 \text{ bulunur.}$$

13. ÖRNEK

$\tan x = \frac{1}{3}$ ve $\tan(x-y) = \frac{1}{4}$ olduğuna göre $\tan y$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{3} - \tan y}{1 + \frac{1}{3}\cdot \tan y} \text{ olur.}$$

Buradan

$$\frac{4}{3} - 4\cdot\tan y = 1 + \frac{1}{3}\cdot\tan y$$

$$\frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}\cdot\tan y + 4\cdot\tan y$$

$$\frac{1}{3} = \frac{13}{3}\cdot\tan y \Rightarrow \tan y = \frac{1}{13} \text{ bulunur.}$$

14. ÖRNEK

$\cot 57^\circ = x$ olmak üzere $\cot 12^\circ$ nin x türünden değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\cot(57^\circ - 12^\circ) = \frac{\cot 57^\circ \cdot \cot 12^\circ + 1}{\cot 12^\circ - \cot 57^\circ}$$

$$\cot 45^\circ = \frac{x\cdot\cot 12^\circ + 1}{\cot 12^\circ - x} \Rightarrow 1 = \frac{x\cdot\cot 12^\circ + 1}{\cot 12^\circ - x} \text{ olur.}$$

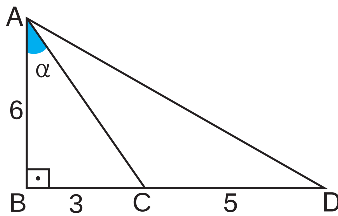
Buradan

$$x\cdot\cot 12^\circ + 1 = \cot 12^\circ - x$$

$$\cot 12^\circ \cdot \frac{(x-1)}{x-1} = \frac{-x-1}{x-1}$$

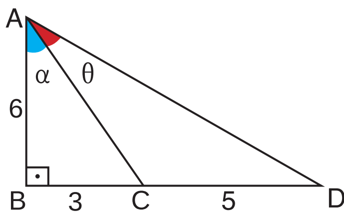
$$\cot 12^\circ = \frac{-x-1}{x-1} = \frac{x+1}{1-x} \text{ bulunur.}$$

15. ÖRNEK



ABD dik üçgeninde B, C ve D noktaları doğrusaldır. $[AB] \perp [BD]$, $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 3$ cm, $|CD| = 5$ cm ve $m(\widehat{BAC}) = \alpha$ olduğuna göre $\tan(\widehat{CAD})$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



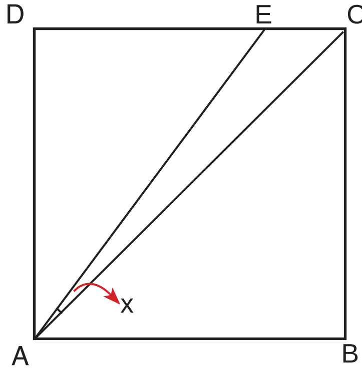
$m(\widehat{BAC}) = \alpha$ ve $m(\widehat{CAD}) = \theta$ olsun.

$\tan\alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ olur.

$$\tan(\alpha+\theta) = \frac{8}{6} \Rightarrow \frac{\tan\alpha + \tan\theta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\theta} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} + \tan\theta}{1 - \frac{1}{2}\cdot\tan\theta} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} + 3\cdot\tan\theta = 4 - 2\cdot\tan\theta \Rightarrow \cancel{5}\cdot\tan\theta = \frac{\cancel{5}}{2} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

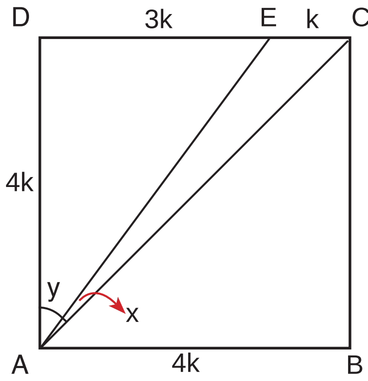
16. ÖRNEK



ABCD karesinde D, E ve C noktaları doğrusaldır. $4|CE| = |AB|$ ve $m(\widehat{EAC}) = x$ olduğuna göre $\tan x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$4|CE| = |AB|$ ve $|EC| = k$ ise $|AB| = 4k$ olur.



$m(\widehat{DAE}) = y$ olursa $\tan y = \frac{3}{4}$ ve $\tan(x+y) = \frac{4k}{4k} = 1$ olur.

Buradan

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

$$1 = \frac{\tan x + \frac{3}{4}}{1 - \tan x \cdot \frac{3}{4}}$$

$$\tan x + \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{4} \cdot \tan x$$

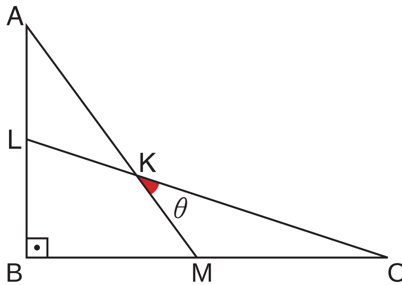
$$\tan x + \frac{3}{4} \cdot \tan x = 1 - \frac{3}{4}$$

$$\frac{7 \cdot \tan x}{4} = \frac{1}{4}$$

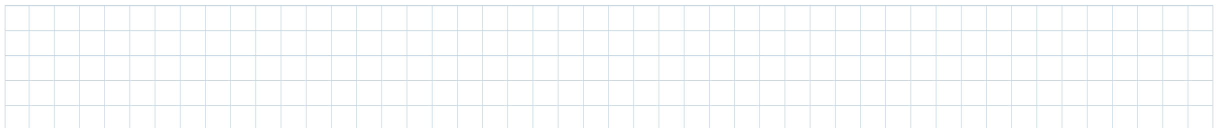
$$\tan x = \frac{1}{7} \text{ bulunur.}$$

Ders İçi Uygulama 6

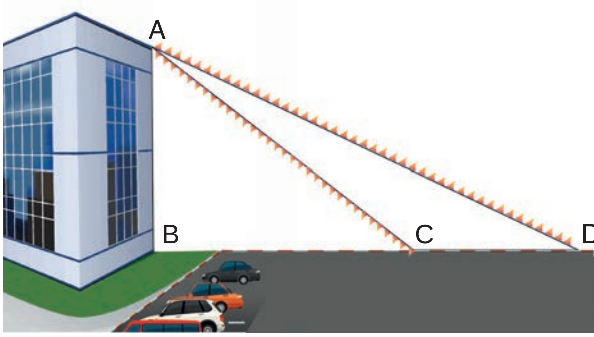
Bireysel Çalışma



ABM ve LBC dik üçgenlerinde
$L \in [AB]$
$M \in [BC]$
$[AB] \perp [BC]$
$|MC| = 2|AL| = 4$ cm
$|BL| = 3$ cm
$|BM| = 5$ cm
$[MA] \cap [LC] = \{K\}$ ve $m(\widehat{MKC}) = \theta$
olduğuna göre $\cot\theta$ değerini bulunuz.



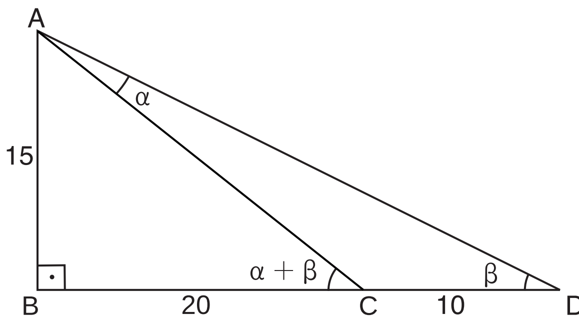
17. ÖRNEK



Sokak hayvanları yararına düzenlenen bir kermeste 15 m yüksekliğindeki binanın üst noktasından açık otopark üzerindeki iki noktaya bayraklı, doğrusal çelik ipler çekilmiştir. $|AB| = 15$ m, $|BC| = 20$ m ve $|CD| = 10$ m'dir. B, C, D noktaları doğrusal ve $[AB] \perp [BD]$ olduğuna göre $\cot(\widehat{CAD})$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen durum modellenirse $m(\widehat{CAD}) = \alpha$, $m(\widehat{ADB}) = \beta$ ve $m(\widehat{ACB}) = \alpha + \beta$ olur.



$\tan\beta = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ ve $\tan(\alpha + \beta) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ olur.

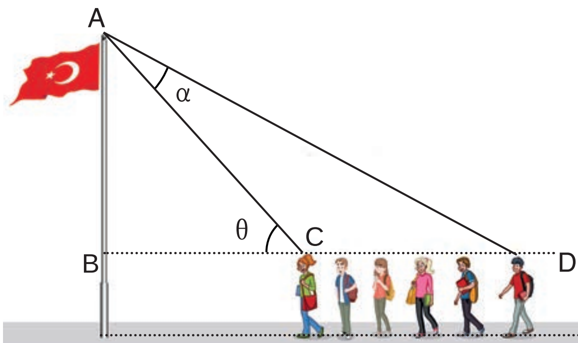
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

$$= \frac{\tan\alpha + \frac{1}{2}}{1 - \tan\alpha \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \text{ olur.}$$

Buradan $\tan\alpha = \frac{2}{11}$ bulunur.

$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$ olduğundan $\cot\alpha = \frac{11}{2}$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 7 — Bireysel Çalışma



Yanda bir okuldaki bayrak törenine hazırlanan öğrencilere ait görsel verilmiştir. Tören için düz zeminde sıraya geçen Ceylin ve Deniz'in boyları 1,7 m'dir. Ceylin sıranın başında, Deniz ise sıranın sonundadır. Zemine dik olan bayrak direğinin boyu 9,7 m'dir. $m(\widehat{CAD}) = \alpha$, $m(\widehat{BCA}) = \theta$, $\cot\theta = \frac{3}{4}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$; B, C ve D noktaları doğrusal olduğuna göre Ceylin ile Deniz arasındaki uzaklığın kaç m olduğunu bulunuz.



ALIŞTIRMALAR 3.1

1. Aşağıdaki trigonometrik değerleri hesaplayınız.

a) $\tan 15^\circ$

b) $\sin \frac{13\pi}{12}$

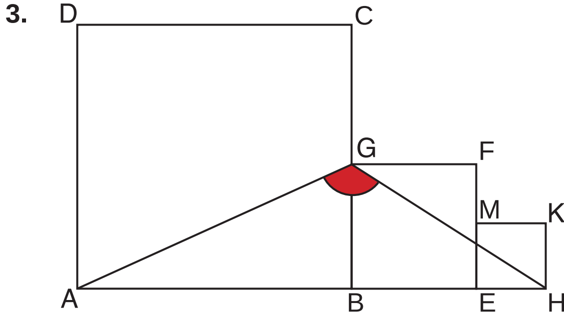
c) $\cos \frac{23\pi}{12}$

ç) $\sin 105^\circ$

d) $\tan \frac{19\pi}{12}$

2. $\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$ **ifadesinin** $\tan x - \tan y$ **cinsinden değerini bulunuz.**

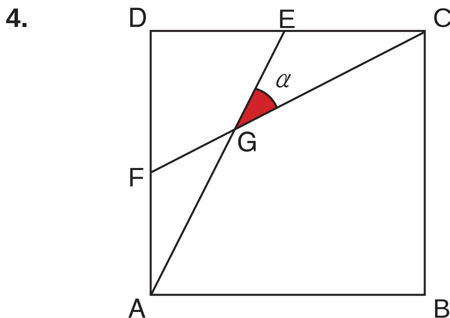
3.



Yukarıdaki şekilde ABCD, BEFG ve EHKM birer karedir. A, B, E, H noktaları doğrusal ve $G \in [BC]$, $M \in [EF]$ dır.

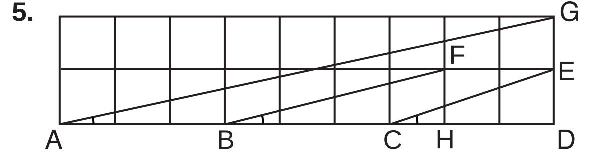
$|AB| = 2|BE| = 4|EH|$ **olduğuna göre** $\tan(\widehat{AGH})$ **değerini bulunuz.**

4.



Yukarıdaki ABCD karesinde $E \in [DC]$, $F \in [AD]$, $m(\widehat{EGC}) = \alpha$ **ve** $|DE| = |DF| = |FA|$ **olduğuna göre** $\sin\alpha$ **değerini bulunuz.**

5.

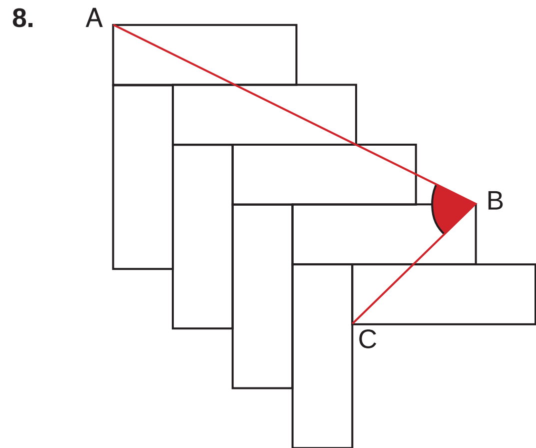


Yukarıdaki 18 eş kareden meydana gelen şekilde $m(\widehat{DAG}) = a$, $m(\widehat{DBF}) = b$ **ve** $m(\widehat{DCE}) = c$ **olduğuna göre** $a + b + c$ **değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.**

6. $2y = x + 1$ **ve** $x - 3y = 5$ **doğruları arasındaki dar açının tanjant değerini bulunuz.**

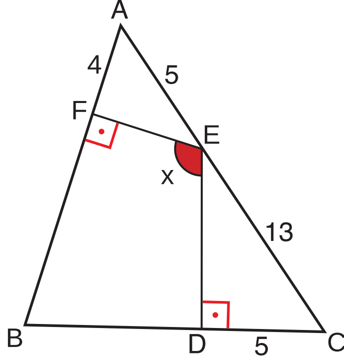
7. Bir ABC üçgeninde $\tan\widehat{A} = 2$ **ve** $\tan\widehat{B} = \frac{2}{3}$ **olduğuna göre** $\tan\widehat{C}$ **değerini bulunuz.**

8.



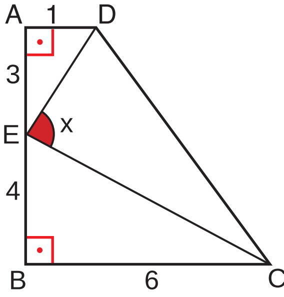
Uzun kenarının uzunluğu 3 birim, kısa kenarının uzunluğu 1 birim olan dokuz özdeş dikdörtgenden oluşmuş yukarıdaki şekle göre $\tan(\widehat{ABC})$ **değerini bulunuz.**

9.



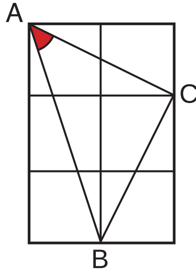
Yukarıda verilen ABC üçgeninde $E \in [AC]$, $[AB] \perp [EF]$, $[BC] \perp [EB]$ $|AF| = 4$ birim, $|AE| = |DC| = 5$ birim, $|EC| = 13$ birim **ve** $m(\widehat{DEF}) = x$ **olduğuna göre** $\sin x$ **değerini bulunuz.**

10.



Yukarıdaki şekilde $E \in [AB]$, $[AD] \perp [AB]$, $[AB] \perp [BC]$ $|AD| = 1$ birim, $|AE| = 3$ birim, $|EB| = 4$ birim, $|BC| = 6$ birim **ve** $m(\widehat{DEC}) = x$ **olduğuna göre** $\cos x$ **değerini bulunuz.**

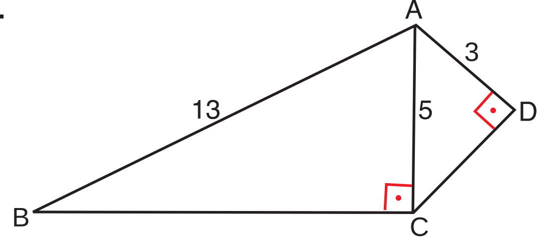
11.



Yukarıdaki şekil 6 eş kareden oluşmuştur.

$m(\widehat{BAC}) = x$ **olduğuna göre** $\tan x$ **değerini bulunuz.**

12.

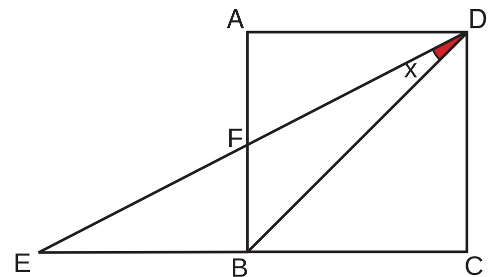


Yukarıdaki şekilde $[AC] \perp [BC]$, $[AD] \perp [DC]$, $|AB| = 13$ birim, $|AC| = 5$ birim, $|AD| = 3$ birim **ve** $m(\widehat{BAD}) = x$ **olduğuna göre** $\cot x$ **değerini bulunuz.**

13. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ **ve** $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$ **olmak üzere** $\sin x = \frac{1}{4}$ **ve** $\cot y = 3$ **ise** $\sin(x + y)$ **değerini bulunuz.**

14. $0 < y < \frac{\pi}{2} < x < \pi$ **olmak üzere** $\tan y = 2$ **ve** $\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 3$ **olduğuna göre** $\tan(x - y)$ **değerini bulunuz.**

15.



Yukarıdaki şekilde ABCD kare, $B \in [EC]$, $F \in [AB]$, $3 \cdot |EB| = 2 \cdot |AB|$ **ve** $m(\widehat{EDB}) = x$ **olduğuna göre** $\cot x$ **değerini bulunuz.**

İki Kat Açı Formülleri

Kosinüs İki Kat Açı Formülleri

İki kat açı formülleri toplam-fark formüllerinden yararlanarak elde edilir.
$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ toplam formülünde $y = x$ alınırsa
$\cos(x+x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$ olur.
Buradan $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ biçiminde kosinüs iki kat açı formülü bulunur.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ özdeşliğinden yararlanarak $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ve $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ değerleri $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ denkleminde sırasıyla yazılırsa
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$ ve
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ elde edilir.

Bilgi

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

18. ÖRNEK

$\cos 2x = \frac{3}{5}$ ise $\cos x$ in alabileceği değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM

$\cos 2x = \frac{3}{5} \Rightarrow 2 \cdot \cos^2 x - 1 = \frac{3}{5}$

$2 \cdot \cos^2 x = \frac{3}{5} + 1 \Rightarrow 2 \cdot \cos^2 x = \frac{8}{5} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{5}$

$|\cos x| = \frac{2}{\sqrt{5}}$ olur.

Buradan $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ ve $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ bulunur.

19. ÖRNEK

$\frac{1 + \cos 20°}{1 - \cos 20°}$ ifadesini sadeleştiriniz.

ÇÖZÜM

$$\frac{1 + \cos 20°}{1 - \cos 20°} = \frac{1 + (2 \cdot \cos^2 10° - 1)}{1 - (1 - 2 \cdot \sin^2 10°)} = \frac{1 + 2\cos^2 10° - 1}{1 - 1 + 2 \cdot \sin^2 10°} = \frac{2 \cdot \cos^2 10°}{2 \cdot \sin^2 10°} = \cot^2 10°$$ bulunur.

20. ÖRNEK

$\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Toplamları $\frac{\pi}{2}$ radyan olan iki açıdan birinin kosinüsü diğerinin sinüsüne eşittir.

$\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ eşitliğinden $\sin\frac{3\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8}$ olur.

$\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} = x$

$\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} = x$

$2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 = x - 1$

Eşitliğin her iki tarafına –1 eklenerek iki kat açı formülü elde edilir.

$\cos\frac{2\pi}{8} = x - 1 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4} = x - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = x - 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 8 — Bireysel Çalışma

Tabloda verilen ifadeleri $\cos 2x$ açılımından yararlanarak eşleştiriniz.

a)	$\cos^4 20° - \sin^4 20°$
b)	$2 \cdot \sin^2 35° - 1$
c)	$\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$
ç)	$\frac{\cos 2x - 1}{\sin x}$
d)	$\frac{2 \cdot \cos 28°}{1 + \cos 56°}$
e)	$\sin^4 5° - \cos^4 5°$

I.	$-\cos 70°$
II.	$-2 \cdot \sin x$
III.	$\sec 28°$
IV.	$\cos 170°$
V.	$\cos 40°$
VI.	$\cos x - \sin x$
VII.	$-\cos 50°$

Sinüs İki Kat Açı Formülleri

$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ toplam formülünde $y = x$ alınırsa

$\sin(x + x) = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x$

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$

biçiminde sinüs iki kat açı formülü elde edilir.

21. ÖRNEK

$\frac{\sin 100°}{\sin 50°}$ ifadesini sadeleştiriniz.

ÇÖZÜM

$\frac{\sin 100°}{\sin 50°} = \frac{\sin(2 \cdot 50°)}{\sin 50°}$

$= \frac{2 \cdot \sin 50° \cdot \cos 50°}{\sin 50°} = 2 \cdot \cos 50°$ bulunur.

22. ÖRNEK

$\sin x + \cos x = \frac{3}{5}$ olduğuna göre $\sin 2x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sin x + \cos x = \frac{3}{5}$ eşitliğinin her iki tarafının karesi alınırsa

$$(\sin x + \cos x)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = \frac{9}{25} \text{ olur.}$$

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + \underbrace{2\sin x \cdot \cos x}_{\sin 2x} = \frac{9}{25} \Rightarrow 1 + \sin 2x = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{16}{25} \text{ bulunur.}$$

23. ÖRNEK

$\sin^4 15° + \cos^4 15°$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Birim çember denkleminden

$$\sin^2 15° + \cos^2 15° = 1$$

Eşitliğin her iki tarafının karesi alınırsa

$$(\sin^2 15° + \cos^2 15°)^2 = 1^2$$

$$\sin^4 15° + 2 \cdot \sin^2 15° \cdot \cos^2 15° + \cos^4 15° = 1$$

$$\sin^4 15° + \cos^4 15° = 1 - 2 \cdot \sin^2 15° \cdot \cos^2 15°$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot [2 \cdot \sin 15° \cdot \cos 15°]^2$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot (\sin 30°)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{7}{8} \text{ bulunur.}$$

24. ÖRNEK

$22x = \pi$ olmak üzere $\frac{\cos 7x}{2\cos 5x} + \frac{\sin 7x}{2\sin 5x}$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\cos 7x}{\underset{(\sin 5x)}{2\cos 5x}} + \frac{\sin 7x}{\underset{(\cos 5x)}{2\sin 5x}} = \frac{\sin 7x \cdot \cos 5x + \sin 5x \cdot \cos 7x}{2 \cdot \sin 5x \cdot \cos 5x}$$

Sinüs toplam formülünden

Sinüs iki kat açı formülünden

$$= \frac{\sin(7x + 5x)}{\sin 10x}$$

$$= \frac{\sin 12x}{\sin 10x}$$

$$= \frac{\sin(\pi - 10x)}{\sin 10x}$$

$12x + 10x = \pi$

$12x = \pi - 10x$

$$= \frac{\cancel{\sin 10x}}{\cancel{\sin 10x}} = 1 \text{ bulunur.}$$

25. ÖRNEK

$\cos^2 24° - 2\cdot\cos 21°\cdot\sin 21° - \sin^2 24°$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\cos^2 24° - 2\cdot\cos 21°\cdot\sin 21° - \sin^2 24° = \underbrace{\cos^2 24° - \sin^2 24°} - \underbrace{2\cdot\cos 21°\cdot\sin 21°}$$

Kosinüs iki kat açı formülünden

$$= \cos(2\cdot 24°) - \sin(2\cdot 21°)$$
$$= \cos 48° - \sin 42°$$
$$= \cos 48° - \sin(90° - 48°)$$
$$= \cos 48° - \cos 48° = 0 \text{ bulunur.}$$

Sinüs iki kat açı formülünden

26. ÖRNEK

$\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} = \dfrac{3}{2}$ olduğuna göre $\sin 2x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} = \frac{3}{2}$$
$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{3}{2}$$

cos 2x açılımı

$$\frac{\cancel{\cos x - \sin x}}{(\cos x + \sin x)\cdot\cancel{(\cos x - \sin x)}} = \frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{\cos x + \sin x} = \frac{3}{2}$$
$$\cos x + \sin x = \frac{2}{3} \text{ olur.}$$

Eşitliğinin her iki tarafının karesi alınırsa

$$(\sin x + \cos x)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$
$$\sin^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x = \frac{4}{9}$$
$$1 + \sin 2x = \frac{4}{9} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{5}{9} \text{ bulunur.}$$

27. ÖRNEK

$\sin x - \cos x = \dfrac{1}{3}$ olduğuna göre $\cos 4x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sin x - \cos x = \dfrac{1}{3}$ eşitliğinin her iki tarafının karesi alınırsa

$$(\sin x - \cos x)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$\sin^2 x - 2\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x = \frac{1}{9}$$
$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} - \underbrace{2\sin x\cdot\cos x}_{\sin 2x} = \frac{1}{9} \Rightarrow 1 - \sin 2x = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin 2x = \frac{8}{9} \text{ olur.}$$
$$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 2\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2 = -\frac{47}{81} \text{ bulunur.}$$

Ders İçi Uygulama 9

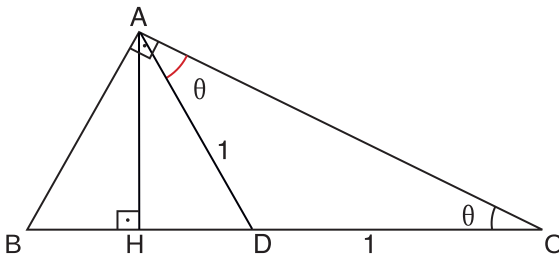
Bireysel Çalışma

1. $\sin 40^\circ = a$ ise $\cos 100^\circ$ nin a türünden değerini bulunuz.

2. $\cot 10^\circ = x$ olmak üzere $\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ$ çarpımının x türünden değerini bulunuz.

3. $\cos\left(2\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.

4.



Yandaki gibi verilen bir ABC dik üçgeninde B, H, D ve C doğrusal, $|BD| = |DC| = |AD| = 1$, $[AH] \perp [BC]$ ve $m(\widehat{BCA}) = \theta$ olmak üzere

a) $A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot |AH| \cdot |BC|$ alan bağıntısını kullanarak $\sin 2\theta$ değerini bulunuz.

b) $|AC|^2 = |HC| \cdot |BC|$ Öklid bağıntısını kullanarak $\cos 2\theta$ değerini bulunuz.

Tanjant ve Kotanjant İki Kat Açı Formülleri

$\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\cdot\tan y}$ tanjant için toplam formülünde $y=x$ alınırsa

$\tan(x+x)=\dfrac{\tan x+\tan x}{1-\tan x\cdot\tan x}$

$\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

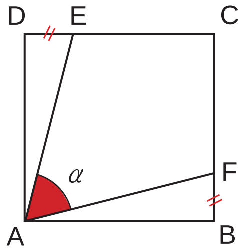
biçiminde tanjant iki kat açı formülü elde edilir.

$\cot(x+y)=\dfrac{\cot x\cdot\cot y-1}{\cot x+\cot y}$ kotanjant için toplam formülünde $y=x$ alınırsa kotanjant iki kat açı formülü $\cot(x+x)=\dfrac{\cot x\cdot\cot x-1}{\cot x+\cot x}=\dfrac{\cot^2 x-1}{2\cot x}$ olur.

Buradan $\cot 2x=\dfrac{\cot^2 x-1}{2\cot x}$ biçiminde elde edilir.

Kotanjant iki kat açı formülü aynı zamanda $\cot 2x=\dfrac{1}{\tan 2x}$ olur.

28. ÖRNEK



Yandaki şekilde ABCD bir kare,

$E\in[DC]$

$F\in[BC]$

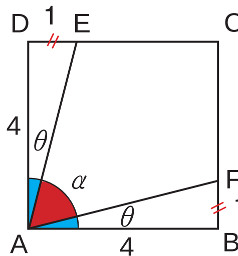
$m(\widehat{FAE})=\alpha$

$|DE|=|FB|$

$|AB|=4|BF|$

olduğuna göre $\cot\alpha+\tan\alpha$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{DAE})=m(\widehat{BAF})=\theta$

$\theta+\alpha+\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$\alpha=\dfrac{\pi}{2}-2\theta$ ve $\tan\theta=\dfrac{1}{4}$

$\cot\alpha=\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-2\theta\right)=\tan 2\theta$ olur.

Buradan

$\tan 2\theta=\dfrac{2\cdot\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$=\dfrac{2\cdot\frac{1}{4}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{16}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{16}{15}=\dfrac{8}{15}$ olur.

$\tan 2\theta=\cot\alpha=\dfrac{8}{15}$ ve $\tan\alpha=\dfrac{15}{8}$

$\cot\alpha+\tan\alpha=\dfrac{8}{15}+\dfrac{15}{8}=\dfrac{289}{120}$ bulunur.

29. ÖRNEK

$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, $\cot x = \frac{3}{4}$ olduğuna göre $\tan\frac{x}{2}$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{1}{2}$ ile genişletilirse $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$ olur.

$\cot x = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan x = \frac{4}{3}$ olur.

$\tan x = \tan\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \dfrac{2 \cdot \tan\frac{x}{2}}{1 - \tan^2\frac{x}{2}}$

ifadesinde $\tan\frac{x}{2} = t$ alınırsa

$$\frac{4}{3} = \frac{2 \cdot t}{1 - t^2}$$
$$6t = 4 - 4t^2$$
$$4t^2 + 6t - 4 = 0$$
$$(4t - 2)(t + 2) = 0$$
$$t_1 = \frac{1}{2} \text{ ve } t_2 = -2 \text{ olur.}$$

$\tan x$ 3. bölgede pozitif olduğundan $\frac{x}{2}$ açısı 2. bölgededir ve $\tan\frac{x}{2}$ negatiftir.

Buradan $\tan\frac{x}{2} = -2$ bulunur.

30. ÖRNEK

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ ve $\tan 2x = \frac{1}{2}$ olduğuna göre $\cot x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\tan 2x = \frac{1}{2}$$
$$\frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{1}{2}$$
$$1 - \tan^2 x = 4 \cdot \tan x$$

$\tan^2 x + 4\tan x - 1 = 0$ olur.

Bu ifadede $\tan x = t$ alınırak $t^2 + 4t - 1 = 0$ denklemi çözülürse

$\triangle = b^2 - 4ac$

$\triangle = 4^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-1)$

$\triangle = 16 + 4$

$\triangle = 20$

$t_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{20}}{2} = \dfrac{-4 - 2\sqrt{5}}{2} = -2 - \sqrt{5}$

$t_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{20}}{2} = \dfrac{-4 + 2\sqrt{5}}{2} = -2 + \sqrt{5}$ olur.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ olduğundan $\tan x > 0$ olmalıdır. Böylece $t_2 = \tan x = -2 + \sqrt{5}$ bulunur.

$\cot x = \dfrac{1}{-2 + \sqrt{5}}$ olur.

31. ÖRNEK

$\cot\left(2\cdot\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.

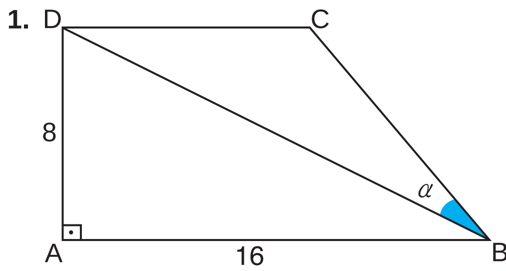
ÇÖZÜM

$\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} = x \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cot x = 2$ olur.

$$\cot\left(2\cdot\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \cot 2x$$

$$= \frac{\cot^2 x - 1}{2\cdot\cot x} = \frac{2^2 - 1}{2\cdot 2} = \frac{3}{4} \text{ bulunur.}$$

Ders İçi Uygulama 10 — Bireysel Çalışma

1. 

Yandaki şekilde ABCD bir dik yamuk

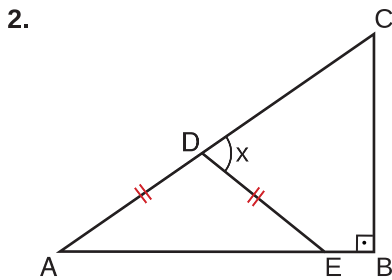
$m(\widehat{DBC}) = \alpha$

$|AB| = 16$ birim

$|AD| = 8$ birim

$|DC| = |BC|$

olduğuna göre $\tan 4\alpha$ değerini bulunuz.

2. 

Yandaki ABC üçgeninde

$[AB] \perp [BC]$

$D \in [AC]$

$E \in [AB]$

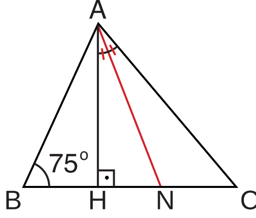
$|AD| = |DE|$

$3|AB| = 4|BC|$

$m(\widehat{CDE}) = x$

olduğuna göre $\tan x$ değerini bulunuz.

1.



Şekildeki ABC üçgeninde $[AH] \perp [BC]$, **B, H, N, C noktaları doğrusal,** $|AH| = |HC|$, $[AN]$ **HAC açısının açıortayı ve** $m(\widehat{ABC}) = 75°$ **olduğuna göre iki kat açı bağıntılarını kullanarak aşağıdaki değerleri bulunuz.**

a) $\cos(\widehat{BAH})$

b) $\sin(\widehat{HAN})$

c) $\cot(\widehat{NAC})$

2. Aşağıdaki ifadelerin en sade hâlini bulunuz.

a) $\dfrac{\sin 16°}{1 + \cos 16°}$

b) $\sqrt{\dfrac{1 - \cos 80°}{2}}$

c) $\dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$

3. Aşağıda verilenlere göre istenen değerleri bulunuz.

a) $\sin x = \frac{3}{5}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ **ise** $\sin\frac{x}{2} = ?$

b) $\sec x = -3$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ **ise** $\cos\frac{x}{2} = ?$

c) $\cot x = 4$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ **ise** $\tan\frac{x}{2} = ?$

ç) $\cot x = -1$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ **ise** $\cot\frac{x}{2} = ?$

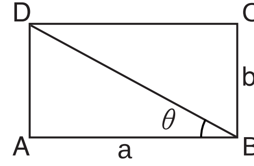
4. Aşağıdaki ifadelerin en sade hâlini bulunuz.

a) $\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{2\cos\alpha}$

b) $\dfrac{\cot x - 1}{\cot x + 1}$

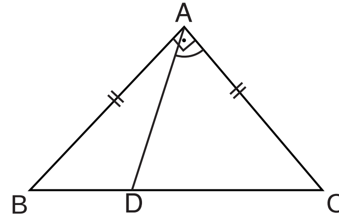
c) $\dfrac{(\ln|1 + \cos 2\theta| - \ln 2)}{2}$

5.



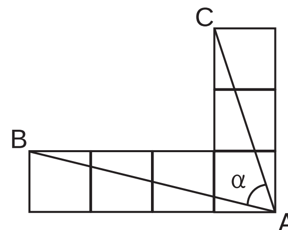
Şekildeki ABCD dikdörtgeninde $|AB| = a$, $|BC| = b$ **ve** $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{5}{2}$ **olduğuna göre** $\sin 2\theta$ **değerini bulunuz.**

6.



Şekildeki ABC ikizkenar dik üçgeninde $D \in [BC]$ **ve** $|DC| = 2|BD|$ **olduğuna göre** $\tan(\widehat{CAD})$ **değerini bulunuz.**

7. Aşağıda verilen özdeş birimkarelere ayrılmış şekle göre $\cot(\widehat{BAC})$ **değerini bulunuz.**



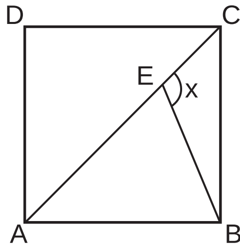
8. $\dfrac{\cos 3x}{\cos x} + \dfrac{\sin 3x}{\sin x} = 2$ **olduğuna göre** $\sin^2 x$ **değerini bulunuz.**

9. x ve y dar açı olmak üzere
$2^{\sin 4x} = (4^{\cos y})^{\sin y}$ **olduğuna göre y nin x türünden değerini bulunuz.**

10. $\tan y = 2$ **olmak üzere**
$\dfrac{\tan(x+y) + \tan(y-x)}{\tan(x+y) \cdot \tan(y-x) - 1}$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

11. $0 < x < \dfrac{\pi}{3}$ **ve** $\tan x = \dfrac{3}{4}$ **olduğuna göre**
$\dfrac{\sin 2x + 2}{\sin^3 x - \cos^3 x}$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

12.



ABCD kare, $E \in [AC]$, $4|CE| = |AC|$ **ve** $m(\widehat{BEC}) = x$ **olduğuna göre** $\cot 2x$ **değerini bulunuz.**

13. $\dfrac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} = 2$ **olduğuna göre** $\cos 4x$ **değerini bulunuz.**

14. $\sin 10° = m$ **olduğuna göre** $\cos^2 40°$ **nin m cinsinden değerini bulunuz.**

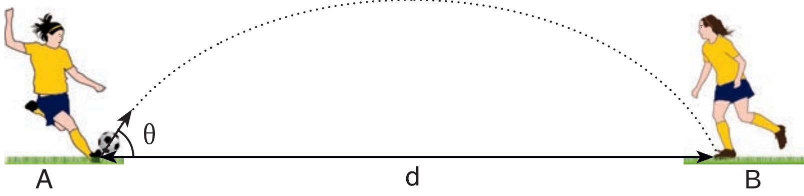
15. $5 \cdot \sin x = 12 \cdot \cos x$ **olduğuna göre** $\cot 2x$ **değerini bulunuz.**

16. $\dfrac{\sin 2x + 1}{\cos 2x} = \dfrac{1}{2}$ **olduğuna göre** $\tan 2x$ **değerini bulunuz.**

Terimler ve Kavramlar

- **Trigonometrik denklem**

3.2. TRİGONOMETRİK DENKLEMLER



Yukarıda verilen görselde A noktasındaki futbolcu, topu B noktasındaki takım arkadaşına atmak istiyor. Futbolcu, topa ilk hızı V_0 olacak ve yer ile θ açısı oluşturacak şekilde vurursa g yer çekimi ivmesi $10\ m/sn.^2$ olmak üzere topun yatayda aldığı yolun uzunluğu $d = \frac{V_0^2}{g} \cdot \sin 2\theta$ biçiminde olur.

Buna göre
a) Futbolcu topa 30 m/sn. hızla vurduğunda top takım arkadaşına doğru 45 m mesafe katettiğine göre futbolcunun topa kaç derecelik açı ile vurduğunu bulabilir misiniz?

b) Futbolcunun en uzağa atabilmek için topa kaç derecelik açı ile vurması gerekir?

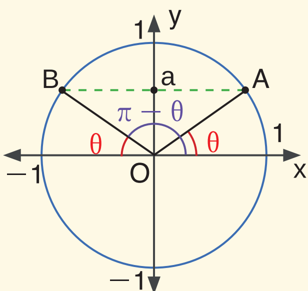
Bilgi

İçerisinde trigonometrik fonksiyonların bulunduğu denklemlere **trigonometrik denklemler** denir. Denklemi sağlayan değerlere **denklemin kökleri** ve köklerin oluşturduğu kümeye **çözüm kümesi** denir.

$\sin x = a$, $\cos x = a$, $\tan x = a$ ve $\cot x = a$ Biçimindeki Trigonometrik Denklemler

$\sin x = a$ Denkleminin Çözüm Kümesi

Bilgi



A ve B birim çember üzerinde iki nokta, $-1 \leq a \leq 1$ olmak üzere $\sin x = a$ denkleminin $[0, 2\pi)$ nda köklerinden biri θ ise $\sin x = a$ denkleminin çözüm kümesi $Ç = \{x \mid x = \theta + 2k\pi \vee x = (\pi - \theta) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ biçiminde elde edilir.

1. ÖRNEK

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin $[0, 2\pi)$ nda I. bölgede $x = \frac{\pi}{3}$ ve II. bölgede $x = \frac{2\pi}{3}$ olmak üzere iki kökü vardır.

Buradan $Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

2. ÖRNEK

$\sin x = -\frac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$[0, 2\pi)$ nda $\sin x = -\frac{1}{2}$ denkleminin biri III. biri IV. bölgede olmak üzere iki farklı kökü vardır.

$Ç = \left\{x \mid x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

$\sin\left(\frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right) = -\frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right) = -\frac{1}{2}$

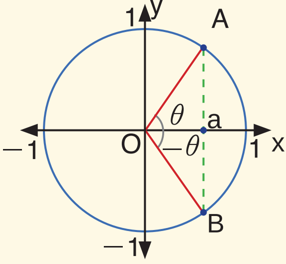
Ders İçi Uygulama 11 — Bireysel Çalışma

Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $\sin x = 1$ **b)** $\sin x = 0$ **c)** $\sin x = -1$

$\cos x = a$ Denkleminin Çözüm Kümesi

Bilgi

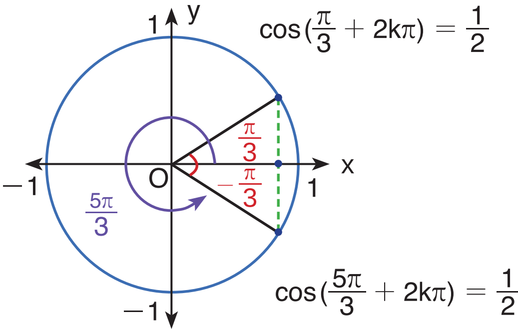


A ve B birim çember üzerinde iki nokta, $-1 \leq a \leq 1$ olmak üzere $\cos x = a$ denkleminin $[0, 2\pi)$ nda köklerinden biri θ ise $\cos x = a$ denkleminin çözüm kümesi $Ç = \{x \mid x = \theta + 2k\pi \vee x = -\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ biçiminde elde edilir.

3. ÖRNEK

$\cos x = \frac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM



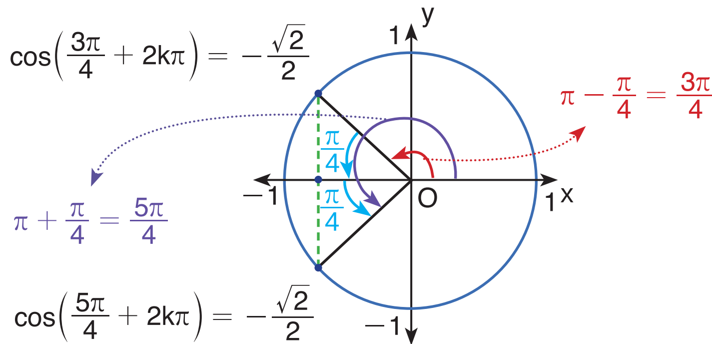
$[0, 2\pi)$ nda $\cos x = \frac{1}{2}$ denkleminin biri I. biri IV. bölgede olmak üzere iki farklı kökü vardır.

$Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

4. ÖRNEK

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM



$Ç = \left\{x \mid x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 12 — Bireysel Çalışma

1. Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözümlerini bulunuz.

a) $\cos x = 1$ **b)** $\cos x = 0$ **c)** $\cos x = -1$

2. $[0, \pi)$ nda $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözümlerini bulunuz.

$\tan x = a$ veya $\cot x = b$ Denklemlerinin Çözüm Kümesi

Bilgi

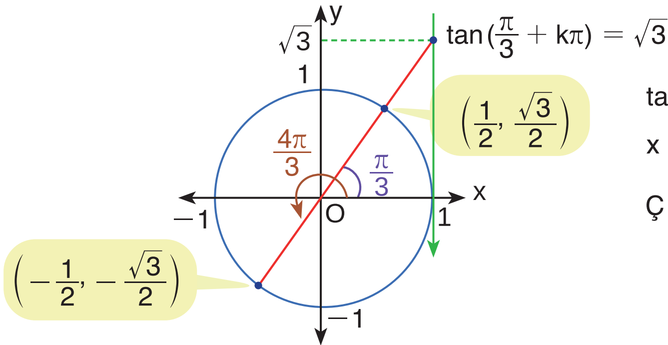
$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\tan x = a$ denkleminin $[0, \pi)$ nda köklerinden biri θ ise $\tan x = a$ denkleminin çözüm kümesi $Ç = \{x \mid x = \theta + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ biçiminde elde edilir.

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\cot x = a$ denkleminin $[0, \pi)$ nda köklerinden biri θ ise $\cot x = a$ denkleminin çözüm kümesi $Ç = \{x \mid x = \theta + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ biçiminde elde edilir.

5. ÖRNEK

$\tan x = \sqrt{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM



$\tan x = \sqrt{3}$ denkleminin $[0, \pi)$ nda kökü

$x = \frac{\pi}{3}$ olur.

$Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

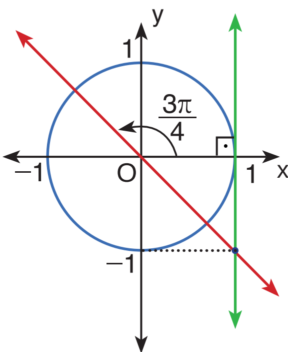
Bilgi

$\tan x \cdot \cot x = 1$ ve $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ olduğundan $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $\cot x = a$ denklemi yerine $\tan x = \frac{1}{a}$ denklemi çözülür.

6. ÖRNEK

$\cot x = -1$ denkleminin $[0, 2\pi)$ nda çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM



$\tan x = \frac{1}{\cot x}$ olduğundan $[0, 2\pi)$ nda $\tan x = -1$ denkleminin kökü

$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ olur.

Buradan $Ç = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 13 — Bireysel Çalışma

Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $\tan x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ **b)** $\tan x = -1$ **c)** $\cot x = 1$ **ç)** $\cot x = \sqrt{3}$

$\sin f(x) = a$, $\cos f(x) = a$, $\tan f(x) = a$ ve $\cot f(x) = a$ Biçimindeki Trigonometrik Denklemler

$\sin f(x) = a$, $\cos f(x) = a$, $\tan f(x) = a$ veya $\cot f(x) = a$ biçimindeki trigonometrik denklemler $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\tan x = a$ veya $\cot x = a$ denklemlerinin çözümüne benzer biçimde çözülür.

7. ÖRNEK

$2\sin 2x - \sqrt{3} = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2\sin 2x - \sqrt{3} = 0$

$2\sin 2x = \sqrt{3} \Rightarrow \sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ olur.

$2x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ veya $2x = \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

$x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ $\qquad 2x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$ olur.

$Ç = \left\{x \mid x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \ \vee \ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

8. ÖRNEK

$\sqrt{3}\cot\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sqrt{3}\cot\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$

$\sqrt{3}\cot\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \cot\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ olur.

$x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$

$Ç = \left\{x \mid x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 14 — Bireysel Çalışma

1. $2\sin 3x = -\sqrt{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

2. $2 \cdot \cos(3x + 15°) + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Trigonometrik Denklemlerin Çarpanlarına Ayırarak Çözümü

9. ÖRNEK

$\sin 2x - \sqrt{3}\sin x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sin 2\theta = 2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$

$2\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$ denklemi $\sin x$ parantezine alınırsa $\sin x \cdot (2\cos x - \sqrt{3}) = 0$

$\sin x = 0 \Rightarrow Ç_1 = \{x \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olur.

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ veya $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

$Ç_2 = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee\ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olur.

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 = \left\{x \mid x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 15 — **Bireysel Çalışma**

$\sin 4x - 2 \cdot \cos 2x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Trigonometrik Özdeşlikler Yardımı ile Çözülebilen Denklemler

10. ÖRNEK

$\cos 8x + 3\cos 4x - 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini trigonometrik özdeşlikler yardımı ile bulunuz.

ÇÖZÜM

$\cos 8x + 3\cos 4x - 1 = 0$ denkleminde $\cos 8x = 2\cos^2 4x - 1$ yazılırsa
$(2\cos^2 4x - 1) + 3\cos 4x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 4x + 3\cos 4x - 2 = 0$ olur.
$\cos 4x = t$ olsun.

$2t^2 + 3t - 2 = 0$

$(2t - 1)(t + 2) = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}$ veya $t_2 = -2$ olur.

$\cos 4x = \frac{1}{2}$ veya $\cos 4x = -2$ denklemlerinin çözüm kümesi $\cos 4x = -2 \Rightarrow Ç_1 = \varnothing$

$\cos 4x = \frac{1}{2} \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow 4x = 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$Ç_2 = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \ \cup\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \ \cup\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

11. ÖRNEK

$\sin 5x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos 5x = 2\sin 2x$ denkleminin $[0, 2\pi)$ ndaki köklerini trigonometrik özdeşlikler yardımı ile bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\sin 5x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos 5x = 2 \cdot \sin 2x$$
$$\sin(5x - x) = 2 \cdot \sin 2x$$
$$\sin(4x) = 2 \cdot \sin 2x$$
$$2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = 2 \cdot \sin 2x$$
$$2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x - 2\sin 2x = 0 \Rightarrow 2 \cdot \sin 2x \cdot (\cos 2x - 1) = 0$$
$$\sin 2x = 0 \text{ veya } \cos 2x = 1$$
$$2x = 0 + k\pi \text{ veya } 2x = 0 + 2k\pi$$
$$x = \frac{k\pi}{2} \text{ veya } x = k\pi \text{ olur.}$$

Verilen tanım aralığında $Ç = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$ bulunur.

sin(f(x)) = sin(g(x)) Denkleminin Çözüm Kümesi

Bilgi

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\sin(f(x)) = \sin(g(x))$ denkleminin çözüm kümesi
$f(x) = g(x) + 2k\pi$ veya $f(x) = (\pi - g(x)) + 2k\pi$ denklemlerini sağlayan x değerleridir.

12. ÖRNEK

Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $\sin x = \sin\frac{\pi}{9}$

b) $\sin(4x + 15^\circ) = \sin(3x + 35^\circ)$

ÇÖZÜM

a) $\sin x = \sin\frac{\pi}{9}$ ise $x = \frac{\pi}{9} + 2k\pi$ veya $x = \left(\pi - \frac{\pi}{9}\right) + 2k\pi = \frac{8\pi}{9} + 2k\pi$ olur.

$Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{9} + 2k\pi \;\vee\; x = \frac{8\pi}{9} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

b) $\sin(4x + 15^\circ) = \sin(3x + 35^\circ)$ ise

$$4x + 15^\circ = 3x + 35^\circ + k \cdot 360^\circ$$
$$x = 20^\circ + k \cdot 360^\circ$$

veya

$$4x + 15^\circ = 180 - (3x + 35^\circ) + k \cdot 360^\circ$$
$$4x + 15^\circ = 180 - 3x - 35^\circ + k \cdot 360^\circ$$
$$7x = 130^\circ + k \cdot 360^\circ$$
$$x = \frac{130^\circ}{7} + \frac{k \cdot 360^\circ}{7} \text{ olur.}$$

$Ç = \left\{x \mid x = 20^\circ + k \cdot 360^\circ \;\vee\; x = \frac{130^\circ}{7} + \frac{k \cdot 360^\circ}{7},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

$\cos(f(x)) = \cos(g(x))$ Denkleminin Çözüm Kümesi

Bilgi

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\cos(f(x)) = \cos(g(x))$ denkleminin çözüm kümesi
$f(x) = g(x) + 2k\pi$ veya $f(x) = -g(x) + 2k\pi$ denklemlerini sağlayan x değerleridir.

13. ÖRNEK

$\cos x = \cos 140°$ denkleminin $[0°, 360°)$ ndaki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\cos x = \cos 140°$ ise $x = 140° + k \cdot 360°$ veya $x = -140° + k \cdot 360°$ olur.
Buradan $k = 0$ için $Ç = \{140°, 220°\}$ bulunur.

14. ÖRNEK

$\cos(3x + 50°) = \cos(2x - 20°)$ denkleminin $[0°, 360°)$ ndaki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\cos(3x + 50°) = \cos(2x - 20°)$

$(3x + 50°) = (2x - 20°) + k \cdot 360°$

$x = -70° + k \cdot 360°$

$k = 0 \Rightarrow x = -70° + 0° = -70°$

$k = 1 \Rightarrow x = -70° + 360° = 290°$

$k = 2 \Rightarrow x = -70° + 720° = 650°$

$k = 3 \Rightarrow x = -70° + 1080° = 1010°$

$k = 4 \Rightarrow x = -70° + 1440° = 1370°$

veya $(3x + 50°) = -(2x - 20°) + k \cdot 360°$

$5x = 330° + k \cdot 360°$

$x = 66° + k \cdot 72°$

$x = 66° + 0° = 66°$

$x = 66° + 1 \cdot 72° = 138°$

$x = 66° + 2 \cdot 72° = 210°$

$x = 66° + 3 \cdot 72° = 282°$

$x = 66° + 4 \cdot 72° = 354°$

$-70°, 650°, 1010°$ ve $1370°$ istenen aralığın dışında olduğundan
$Ç = \{66°, 138°, 210°, 282°, 290°, 354°\}$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 16 — Bireysel Çalışma

$|\sin 3x| = \cos 15°$ denkleminin $[0°, 180°)$ ndaki çözüm kümesini bulunuz.

$\tan(f(x)) = \tan(g(x))$ veya $\cot(f(x)) = \cot(g(x))$ Denkleminin Çözüm Kümesi

Bilgi

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\tan(f(x)) = \tan(g(x))$ veya $\cot(f(x)) = \cot(g(x))$ denkleminin çözüm kümesi $f(x) = g(x) + k\pi$ denklemini sağlayan x değerleridir.

15. ÖRNEK

$\tan x = \tan 50°$ denkleminin $[0°, 360°)$ ndaki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\tan x = \tan 50°$ denkleminin kökleri $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = 50° + k\pi$ olur.

Buradan

$k = 0 \Rightarrow x = 50° + 0 \cdot 180° = 50°$

$k = 1 \Rightarrow x = 50° + 1 \cdot 180° = 230°$ olur.

$Ç = \{50°, 230°\}$ bulunur.

16. ÖRNEK

Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(2x - \frac{5\pi}{12}\right)$

b) $\cot(2x + 8°) \cdot \cot(3x + 12°) = 1$

ÇÖZÜM

a)

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(2x - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{7\pi}{12} - 2x\right)$$

$\cot\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{7\pi}{12} - 2x\right) + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \text{ olur.}$$

$Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \; k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

b) $\cot(2x + 8°) \cdot \cot(3x + 12°) = 1$

$$\cot(2x + 8°) = \frac{1}{\cot(3x + 12°)}$$

$$= \tan(3x + 12°)$$

$$= \cot(90° - (3x + 12°)) = \cot(78° - 3x) \text{ olur.}$$

$$2x + 8° = 78° - 3x + k \cdot 180°$$

$$5x = 70° + k \cdot 180°$$

$$x = 14° + k \cdot 36° \text{ olur.}$$

$\cot x = \cot\alpha \;\Rightarrow\; x = \alpha + k\pi$

$Ç = \{x \mid x = 14° + k \cdot 36°, \; k \in \mathbb{Z}\}$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 17

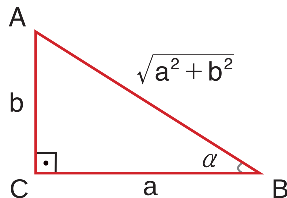
Bireysel Çalışma

1. $\tan 3x \cdot \cot\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$ denkleminin $[0, \pi)$ ndaki çözüm kümesinin elemanlarını bulunuz.

2. $\cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ denkleminin $[0, \pi)$ ndaki çözüm kümesinin elemanlarını bulunuz.

$a \cdot \sin(f(x)) + b \cdot \cos(g(x)) = c$ Biçimindeki Denklemlerin Çözüm Kümesi

a, b, c sıfırdan farklı gerçek sayılar olmak üzere $a\sin x + b\cos x = c$ biçimindeki denklemlere $\sin x$ ve $\cos x$ e göre **lineer (doğrusal) denklemler** denir.



Yanda verilen ABC üçgeninde $\tan\alpha = \frac{b}{a}$ olur. $a\sin x + b\cos x = c$ şeklindeki denklemlerin çözüm kümesini bulmak için $\sin x$ in katsayısı olan a gerçek sayısı ortak parantezine alındığında

$c = a\sin x + b\cos x = a\left(\sin x + \frac{b}{a}\cos x\right)$ elde edilir.

$\frac{b}{a}$ yerine $\tan\alpha$ yazılırsa

$c = a(\sin x + \tan\alpha \cdot \cos x)$

$= a\left(\sin x + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos x\right)$

$= a\left(\frac{\sin x \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos x}{\cos\alpha}\right)$

$= a\frac{\sin(x+\alpha)}{\cos\alpha}$ olur.

Buradan $c \cdot \cos\alpha = a \cdot \sin(x+\alpha)$ bulunur.

Bilgi

$a\sin x + b\cos x = c$ denkleminin çözülmesi için $c^2 \le a^2 + b^2$ koşulu sağlanmalıdır.
Sonuç olarak $a\sin x + b\cos x = c$ denklemi $c^2 \le a^2 + b^2$ koşulunu sağlıyorsa her bir terim a ya veya b ye bölünür ve $\frac{a}{b} = \tan\alpha$ veya $\frac{b}{a} = \tan\alpha$ dönüşümü yapılarak denklemlerin kökleri bulunur.

17. ÖRNEK

$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$a = \sqrt{3}$, $b = 1$ ve $c = 1$ olup denklemin çözülebilmesi için $a^2 + b^2 \geq c^2$ koşulunun sağlanması gerekir. Bu denklem $a^2 + b^2 \geq c^2 \Rightarrow (\sqrt{3})^2 + 1^2 \geq 1^2$ koşulu sağlandığı için çözülebilir.

Denklemde $\sqrt{3}$ yerine $\tan 60°$ yazılırsa

$$\tan 60° \cdot \cos x + \sin x = 1$$

$$\frac{\sin 60°}{\cos 60°} \cdot \cos x + \sin x = 1$$

$$\frac{\cos x \cdot \sin 60° + \cos 60° \cdot \sin x}{\cos 60°} = 1$$

$$\sin(x + 60°) = \cos 60° \Rightarrow \sin(x + 60°) = \sin 30° \text{ olur.}$$

$x + 60° = 30° + k \cdot 360°$ $\qquad$ $x + 60° = 180° - 30° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = -30° + k \cdot 360°$ veya $\qquad$ $x = 150° - 60° + k \cdot 360°$

$x = 330° + k \cdot 360°$ $\qquad$ $x = 90° + k \cdot 360°$ olur.

$Ç = \{x \mid x = 330° + k \cdot 360° \text{ veya } x = 90° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}\}$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 18 — Bireysel Çalışma

1. $\sin 3x - \sqrt{3} \cdot \cos 3x = 2$ denkleminin $[0, \pi)$ ndaki çözüm kümesini bulunuz.

2. $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sqrt{7} \cdot \sin x - 3 \cdot \cos x = c$ denkleminin çözüm kümesinin boş kümeden farklı olması için c nin alacağı değerlerin kümesini bulunuz.

18. ÖRNEK

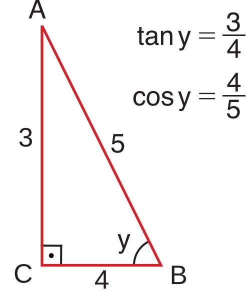
$f(x) = 4\cos x - 3\sin x$ kuralına sahip fonksiyonun en büyük ve en küçük değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f(x) = 4\left(\cos x - \frac{3}{4}\sin x\right)$$

$\frac{3}{4} = \tan y$ olsun.

$$f(x) = 4(\cos x - \tan y \cdot \sin x)$$
$$= 4\left(\cos x - \frac{\sin y}{\cos y}\sin x\right)$$
$$= 4\left(\frac{\cos x \cdot \cos y - \sin y \cdot \sin x}{\cos y}\right)$$
$$= 4\left(\frac{\cos(x+y)}{\frac{4}{5}}\right) = 5 \cdot \cos(x+y) \text{ bulunur.}$$



$\tan y = \frac{3}{4}$

$\cos y = \frac{4}{5}$

$-1 \le \cos(x+y) \le 1$ olduğundan $-5 \le 5\cos(x+y) \le 5 \Rightarrow -5 \le f(x) \le 5$ bulunur.
f fonksiyonunun en küçük değeri -5 ve en büyük değeri 5 olur.

Bilgi

$f(x) = a\cos x + b\sin x$ fonksiyonunun en büyük değeri $\sqrt{a^2 + b^2}$, en küçük değeri $-\sqrt{a^2 + b^2}$ olur.

$a\sin f(x) + b\cos f(x) = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözüm Kümesi

Bilgi

a ve b sıfırdan farklı gerçek sayılar olmak üzere $a\sin x + b\cos x = 0$ biçimindeki denklemlere **birinci dereceden homojen denklemler** denir.

$a\sin x + b\cos x = 0$ denkleminde eşitliğin her iki tarafı $\cos x \neq 0$ olmak üzere $\cos x$ e bölünürse denklem $a\sin x + b\cos x = 0 \Rightarrow \frac{a\sin x}{\cos x} + b = 0 \Rightarrow a\tan x = -b \Rightarrow \tan x = \frac{-b}{a}$ denklemine dönüşür.

19. ÖRNEK

$3\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$3\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 0$$

$$3\sin 2x = \sqrt{3}\cos 2x \Rightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan 2x = \tan\frac{\pi}{6} \text{ olur.}$$

$2x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ olur.

O hâlde $Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

20. ÖRNEK

$\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklemin her bir terimi $\cos^2 x$ e bölünürse

$$\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2 \cdot \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} - 3 \cdot \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$\tan^2 x + 2\tan x - 3 = 0$ bulunur.

$\tan x = t$ ise

$t^2 + 2t - 3 = 0$

$(t + 3)(t - 1) = 0$

$t = -3$ veya $t = 1$ olur.

$\tan x = -3$ ise $x = \arctan(-3) + k\pi$ veya $\tan x = 1$ ise $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ olur.

$Ç = \left\{x \mid x = \arctan(-3) + k\pi \text{ veya } x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 19 — Bireysel Çalışma

$5\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3 = 0$ olduğuna göre $\cot x$ in alabileceği değerleri bulunuz.

21. ÖRNEK

$3\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 1$ denkleminin $[0, \pi]$ ndaki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen denklemin $a\sin^2 x + b\sin x \cdot \cos x + c\cos^2 x = 0$ biçimine dönüştürülmesi için denklem

$3\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 1 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$ şeklinde yazılır.

$2\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0$ homojen denklemi elde edilir.

Her terim $\cos^2 x$ e bölünürse $2\tan^2 x + \tan x - 3 = 0$ olur.

$(2\tan x + 3)(\tan x - 1) = 0$

$\tan x = \frac{-3}{2}$ veya $\tan x = 1$ bulunur.

Tanjant fonksiyonu I. bölgede pozitif değerli olduğundan $\tan x = 1$ denkleminden $x = \frac{\pi}{4}$ olur.

Tanjant fonksiyonu II. bölgede negatif değerli olduğundan $\tan x = -\frac{3}{2}$ denkleminden

$x = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right)$ olur.

$Ç = \left\{\frac{\pi}{4},\ \arctan\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}$ bulunur.

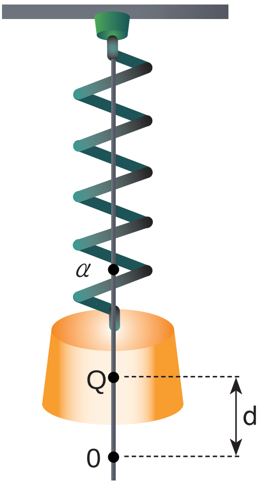
Trigonometrik Denklem Uygulamaları

Birçok alanda olduğu gibi günlük hayatta karşılaşılan problemlerin çözümünde de trigonometrik denklemler kullanılır. Aşağıdaki örneklerde trigonometrik denklemlerin bazı uygulama alanları ve günlük hayat problemleri modellenmiştir.

22. ÖRNEK

Şekilde gösterilen kütlenin salınımının (hava direnci ve sürtünme ihmal edilerek) şu şekilde verildiğini varsayalım: t saniye ve d santimetre cinsinden olmak üzere cismin hareketi $d = 10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ ile ölçülür. Cisim ilk defa $-5\sqrt{3}$ santimetre yer değiştirdiğinde kaç saniye geçeceğini bulunuz.

ÇÖZÜM



Cisim ilk defa $-5\sqrt{3}$ santimetre yer değiştirdiğinde

$-5\sqrt{3} = 10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ olur.

$$-5\sqrt{3} = 10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

$$\frac{-5\sqrt{3}}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

$$\frac{-\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}t \Rightarrow t = 5 \text{ saniye bulunur.}$$

El Battani (858-929)



Görsel 3.1: Battani (Temsilî)

Batı'ya öğretmenlik yapan Batı tarafından kendisine şerefli bir mevki ayrılan Ortaçağ Avrupa'sında Abategnius veya Abategni isimleriyle şöhret bulan Battânî, 858 yılında Harran'da doğdu.

(…)

Paris İslâm Enstitüsü eski profesörlerinden Jacques Risler'e göre yeni trigonometrinin gerçek mucidi Battânî'dir. Batı'ya trigonometriyi o öğretmiştir. Batı'da bu konuya ait ilk bilgiler ona aittir. Trigonometrik bağlantıları bugün kullanılan şekliyle formülleştiren odur. Onun sayesinde trigonometri Batı'lıların anlayıp kullanabileceği bir şekle girmiş ve yaygınlaşmıştır.

(…)

M. Charles "Geometride Metodların Tarihî Görünümü" adlı eserinde Battânî'den söz ederken onun sinüs ve kosinüs tabirlerini ilk kullanan kişi olduğunu ifade eder ve bu tabirleri güneş saati hesaplamasında bulduğunu, ona uzayan gölge adını verdiğini, buna modern geometride "tanjant" dendiğini belirtir.

Eserleri: Risâletünfi tahkik-i akdâr-il ittisâlât, Ez-Zîyc.

Dünyayı Değiştiren Müslüman ve Türk Bilim Adamları

(*) Metin, yazıldığı dönemin yazım ve noktalama kurallarına sadık kalınarak alınmıştır.

Ders İçi Uygulama 20

Bireysel Çalışma

1. Trifaze, üç anlamına gelen tri kelimesiyle faz kelimesinin bir araya gelmesiyle oluşmuştur. Trifaze sanayide kullanılan ve 380 volt gerilime sahip elektrik beslemesine verilen isimdir. Bu akımın voltajı zamana bağlı olarak $f(t) = 380 \cdot \sin(50\pi \cdot t)$ fonksiyonu ile modellenmiştir.

Buna göre bir kaynak makinesi çalıştırıldıktan kaç saniye sonra elektrik akımının voltajı ilk kez 380 volt olur? (t, zaman birimi saniyedir.)

2. Bir doğal gaz rafinerisinden gaz taşıma hattına t dakikada pompalanan gazın ton cinsinden miktarı $G(t) = 150 \cdot \sin\left(4t + \frac{7\pi}{6}\right)$ ile modellenmiştir.

Buna göre doğal gaz rafinerisinden pompalanan gaz miktarının 75 ton olması için <u>en az</u> kaç dakika geçmelidir? (t zaman birimi dakikadır.)

3.

Yandaki şekilde üç kasabanın A, B ve C noktalarından geçecek bir demir yolu güzergahının planı verilmiştir. Demir yolu B noktasından $[AB]$ ile α derecelik pozitif açı ile C'ye doğru dönecektir. Buna göre A'dan C'ye demir yolu uzunluğu d kilometre ise d'yi veren denklemi bulunuz.

ALIŞTIRMALAR 3.3

1. Aşağıdaki trigonometrik denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

a) $3\cos^2 x - \sin^2 x = 0$
b) $4\sin^2 x - 1 = 0$

2. Aşağıdaki trigonometrik denklemlerin $[0, 2\pi]$ ndaki çözüm kümesini bulunuz.

a) $\cot 3x = 1$
b) $2 \cdot \sin 2x - 1 = 0$

3. Aşağıdaki trigonometrik denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

a) $\sin^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} - 6 = 0$

b) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

4. Aşağıdaki trigonometrik denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

a) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right)$

b) $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

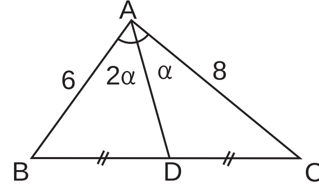
5. Aşağıdaki trigonometrik denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

a) $\sin x + \cos x = 0$
b) $\sqrt{3}\sin x - 3\cos x = 0$

6. Aşağıdaki denklemlerin $[0, 2\pi)$ nda kaç tane kökü olduğunu bulunuz.

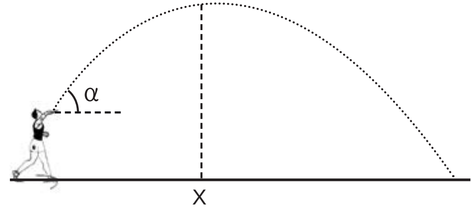
a) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$
b) $2\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x - 2 = 0$

7.



Şekilde $D \in [BC]$, $|AB| = 6$ birim, $|AC| = 8$ birim, $m(\widehat{DAC}) = \alpha$, $m(\widehat{BAD}) = 2\alpha$ **ve** $|BD| = |DC|$ **olduğuna göre** $\cos 2\alpha$ **değerini bulunuz.**

8.



Yukarıda bir sporcunun attığı diskin aldığı yatay mesafe $X(\alpha) = 100\sin 2\alpha + 2$ denklemi ile modellenmiştir.

Sporcunun diski 52 metre uzağa atabilmesi için kaç derecelik açı ile fırlatması gerektiğini hesaplayınız.

9. x **ve** y **birer dar açı olmak üzere** $3\tan x = 2\cot y = 1$ **olduğuna göre** $x + y$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

Aşağıdaki trigonometrik ifadelerin değerlerini karşılarında verilen boşluklara yazınız.

1.

$\cos\frac{5\pi}{12}$	
$\sin\frac{7\pi}{12}$	
$\tan\frac{13\pi}{12}$	
$\cot\frac{11\pi}{12}$	
$\tan\frac{\pi}{8}$	

Aşağıdaki trigonometrik denklemleri, $[0, 2\pi)$ ndaki çözüm kümeleri ile eşleştiriniz.

2. a) $\sin 2x + 1 = 0$

b) $\tan 3x - 1 = 0$

c) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

ç) $3\cot 2x + \sqrt{3} = 0$

I. $Ç = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

II. $Ç = \left\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\}$

III. $Ç = \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$

IV. $Ç = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

V. $Ç = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

3-25. çoktan seçmeli soruları cevaplayınız.

3. $1 - 2\cdot\cos^2 75°$ **ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

4. $\cos(a+b)\cos(a-b) - \sin(a+b)\sin(a-b)$ **ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\cos a$ B) $\sin a$ C) $\cos 2a$ D) $\sin 2a$ E) 0

5. $\frac{1-\cos 2x}{2}$ **ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\cos^2 x$ B) $\cos 2x$ C) $\sin^2 x$ D) $\sqrt{2}\cdot\sin x$ E) $\cos x$

6. $\sqrt{3}\cdot\cos 75° + \sin 75°$ **ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\sqrt{5}$ B) 2 C) $2\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) 1

7. Yanda A noktasından çember üzerindeki B ve C noktalarına teğet olacak şekilde iki doğru çizilmiştir.

Çemberin yarıçap uzunluğu 6 birim, $|AB| = 8$ birim olduğuna göre $\sin(\widehat{BAC})$ kaçtır?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{12}{25}$ C) $\frac{24}{25}$ D) $\frac{1}{4}$ E) 1

8. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ **ve** $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$ **olmak üzere** $\sin x = \frac{3}{5}$ **ve** $\cot y = \frac{1}{2}$ **olduğuna göre** $\tan(x + y)$ **nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) -1 C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 2

9. $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$ **ifadesinin en sade hâli aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\sin\frac{x}{2}$ B) $\cos\frac{x}{2}$ C) $\tan\frac{x}{2}$ D) $\cot\frac{x}{2}$ E) $\tan x$

10. $\cos(x + 10°) = \cos 3x$ **denkleminin** $[0, \pi)$ **ndaki çözüm kümesi kaç elemanlıdır?**

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

11. $\cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$ **olduğuna göre** $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ **değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $-\frac{5}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) 1

12.

Yukarıdaki ABCD dikdörtgeninde

$E \in [DC]$

$F \in [BC]$

$2|FB| = |FC|$

$|EC| = 3|DE|$

$4|AD| = 3|AB|$

$m(\widehat{EAF}) = \alpha$

olduğuna göre $\tan\alpha$ **değeri kaçtır?**

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{7}{11}$ C) $\frac{11}{7}$ D) 7 E) 1

13. $3 \cdot \tan x - \sqrt{3} = 0$ **denkleminin** $[0, 2\pi)$ **ndaki köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{5\pi}{6}$ D) $\frac{7\pi}{6}$ E) π

14. $\dfrac{\cos^4 2x - \sin^4 2x}{\cos 4x}$ **ifadesinin sadeleşmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) -1 B) $\cos 2x$ C) $\sin 2x$

D) $\sec 2x$ E) 1

15. $\cos x - \sin x$ **ifadesinin en büyük değeri ile en küçük değeri arasındaki farkın mutlak değeri kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{2}$

16. $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $\sin x = \dfrac{3}{5}$ **olduğuna göre** $\cos\dfrac{x}{2}$ **nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ B) $-\dfrac{2}{\sqrt{10}}$ C) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

D) $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$ E) $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

17. $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ **ve** $\tan x = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ **olduğuna göre** $\dfrac{\sqrt{a}\sin x + \sqrt{b}\cos x}{\sqrt{a}\sin x - \sqrt{b}\cos x}$ **ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\dfrac{a+b}{a}$ B) $\dfrac{a+b}{a-b}$ C) $\dfrac{b}{a-b}$

D) $\dfrac{-a-b}{a-b}$ E) 1

18.

Şekilde $[OR]$, OPQ **düzlemine dik;** $m(\widehat{OPQ}) = a$, $m(\widehat{OPR}) = b$, $|PQ| = 1$ cm **ve** OPQ **bir dik üçgen olduğuna göre** $|OR|$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\cos a \cdot \sin b$

B) $\cos a \cdot \tan b$

C) $\sin a \cdot \tan b$

D) $\sin a \cdot \sin b$

E) $\cos a \cdot \cos b$

19. $\tan 35° = a$ **olduğuna göre** $\tan 125°$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) a C) $\dfrac{1}{a}$ D) $-a$ E) $-\dfrac{1}{a}$

20. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ **denkleminin** $[0, 2\pi)$ **ndaki çözüm kümesi kaç elemanlıdır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

21. $\cos(x+60^\circ)+\cos(x-60^\circ)$ **ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\sqrt{3}\cdot\sin x$ B) $\sqrt{3}\cdot\cos x$ C) $\sqrt{3}$

D) $\sqrt{2}\cdot\sin x$ E) $\cos x$

22. $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ **olmak üzere**

$\tan^2x+\cot^2x+2\tan x+2\cot x=1$ **ise**
$\tan^2x+\cot^2x$ **toplamının değeri kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

23. $\cos 48^\circ=a$ **olduğuna göre** $\sin 84^\circ$ **aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?**

A) $\frac{a}{8}$ B) $\frac{a}{14}$ C) $2a\sqrt{1-a}$

D) $a\sqrt{1-a^2}$ E) $2a\sqrt{1-a^2}$

24. $\cos^2 2x=\sin^2x$ **denkleminin** $[0,\pi]$ **ndaki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{4\pi}{3}\right\}$

B) $\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right\}$

C) $\left\{\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right\}$

D) $\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right\}$

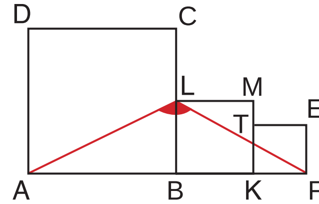
E) $\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right\}$

25. $\dfrac{\sin 10^\circ+\sqrt{3}\cos 10^\circ}{\cos 20^\circ}$ **ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

26-56. açık uçlu soruları cevaplayınız.

26.



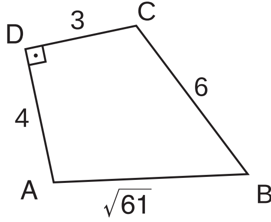
Şekilde ABCD, BKML, KFET birer karedir. A, B, K, F doğrusal noktalar ve $|AB|=3|BK|=4|KF|$ **olduğuna göre** $\tan(\widehat{ALF})$ **değerini bulunuz.**

27. $\sin\left(2\arccos\frac{4}{5}\right)$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

28. $[0,\pi]$ nda $\sin 2x-\sqrt{2}\cdot\cos x=0$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

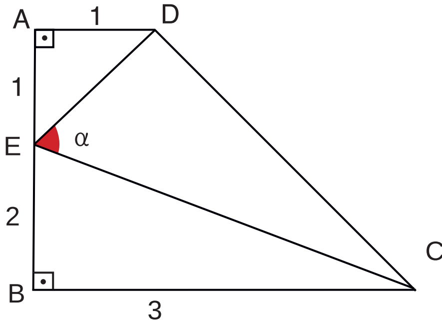
29. $\tan 20^\circ \cdot \left(\dfrac{1+\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}\right)$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

30.



Şekildeki ABCD dörtgeninde $[AD] \perp [DC]$ olduğuna göre $\tan(\widehat{DAB})$ değerini bulunuz.

31.



Şekilde ABCD dik yamuk ve $E \in [AB]$ olduğuna göre $\tan\alpha$ değerini bulunuz.

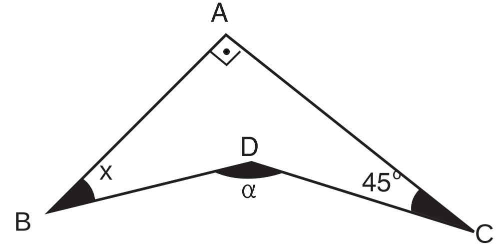
32. $\cos 2x = \dfrac{1}{4}$ **olduğuna göre** $\sin^4 x + \cos^6 x$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

33. $\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$ **olduğuna göre** $\tan x$ **değerini bulunuz.**

34. $\dfrac{\dfrac{\sin 3x}{\sin x} + \dfrac{\cos 3x}{\cos x}}{\cos 2x}$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

35. $\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$ **olduğuna göre** $\tan x$ **ifadesinin alabileceği farklı değerlerin toplamını bulunuz.**

36.



Yukarıdaki şekilde

$[AB] \perp [AC]$

$m(\widehat{BDC}) = \alpha$

$m(\widehat{ABD}) = x$

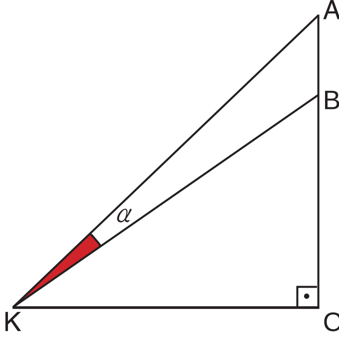
$m(\widehat{ACD}) = 45^\circ$

$\tan x = \dfrac{2}{3}$

olduğuna göre $\tan\alpha$ **nın değerini bulunuz.**

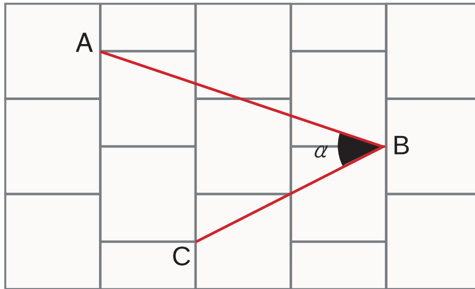
37. $[0,\pi]$ **ında** $2\cdot\sin^2 x - 3\cdot\sin x + 1 = 0$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

38.



Yukarıdaki şekilde
$B \in [AC]$
$m(\widehat{AKB}) = \alpha$
$[AC] \perp [KC]$
$|AC| = |KC|$
$4\cdot|AB| = |BC|$
olduğuna göre $\tan\alpha$ **değerini bulunuz.**

39.



Yukarıdaki şekilde kare şeklinde eş fayanslarla kaplanmış bir zemin gösterilmiştir.

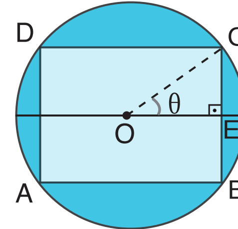
Buna göre $\tan(\widehat{ABC})$ **kaçtır?**

40. $[0,\ 2\pi]$ **nda** $\sin x - \sqrt{3}\cdot\cos x - 2 = 0$ **denkleminin çözüm kümesinin kaç elemanlı olduğunu bulunuz.**

41. Dalyan Kaunos Kral Mezarları turu yapan 2 turist kafilesi sırasıyla A ve B noktalarında bulunan gişelerden geçiş yapıp $y = \cos 2x + 5$ ve $y = 9 - 7\sin 2x$ trigonometrik eğrileri çizerek turu tamamlamıştır.

Bu göre $[0,3\pi]$ **nda kaç defa aynı noktadan geçerler bulunuz.**

42.



Yarıçap uzunluğu 1 birim olan O merkezli çemberin içine şekildeki gibi köşeleri çember üzerinde olan ABCD dikdörtgeni yerleştiriliyor.

$|OE| = a$ **birim,** $|CE| = b$ **birim ise dikdörtgenin alanını** θ **ya bağlı olarak bulunuz.**

43. $0 \leq x < 2\pi$ **aralığında** $4\sin^2 x - 3 = 0$ **denkleminin kaç tane kökü olduğunu bulunuz.**

44. $0 < x < 2\pi$ **iken** $\sin x$, 2 **ve** $8\cos x$ **bir dizinin ardışık üç terimi olduğuna göre bu üç terimin bir geometrik dizi oluşturması için x in alabileceği değerleri bulunuz.**

45. $\tan x + \tan y + \tan x \cdot \tan y = 1$ **olduğuna göre** $\cot(x+y)$ **değerini bulunuz.**

46. $\dfrac{\cos 2x + 1}{\sin 2x} = \cot(2x - 20)$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

47. $\cos x \cdot \sin x = \dfrac{1}{4}$ **olduğuna göre**

$\sin^4 x + \cos^4 x$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

48. Evlerde kullanılan ev aletlerinin elektrik akımı 220 volttur. Bu akımın voltajı zamana bağlı olarak $f(t) = 110 \cdot \sec\left(\dfrac{\pi}{2} - 90t\right)$ fonksiyonu ile modellenmiştir. (t, saniye)

Buna göre bir elektrikli ev aletinin çalışabilmesi için kaç saniye geçmesi gerekir?

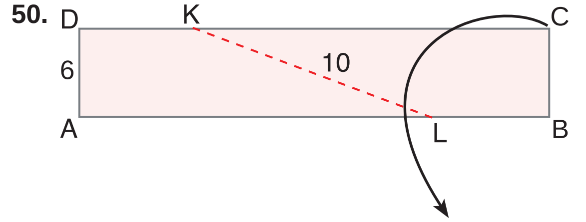
49. A ve B petrol rafinerilerinden petrol taşıma hattına t dakikada pompalanan petrolün ton cinsinden miktarı sırasıyla

$A(t) = \sin\left(3t + \dfrac{5\pi}{6}\right)$ ve

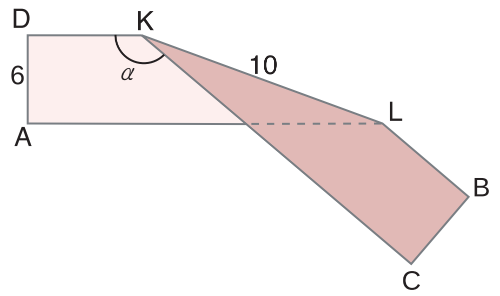
$B(t) = \cos\left(2t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ ile modellenmiştir.

Buna göre petrol rafinelerinden pompalanmaya başlayan petrol miktarının ilk kez kaç dakika sonra eşit olacağını bulunuz. (t zaman birimi dakikadır.)

50.

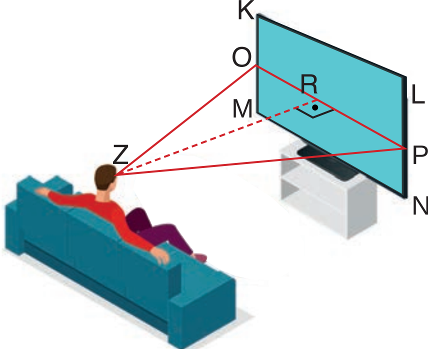


Yukarıdaki şekilde ABCD dikdörtgeni biçiminde verilen bir kâğıt, KL doğrusu boyunca ok yönünde katlandığında aşağıdaki şekil elde ediliyor.



$|KL| = 10$ cm **ve** $|AD| = 6$ cm **olduğuna göre** $\tan\alpha$ **değerini bulunuz.**

51. Ahmet Bey, en iyi televizyon izleme mesafesi için gözlerimizin orta noktası ile televizyonun kenar orta noktaları arasında kalan açının 40° olması gerektiğini öğrenmiştir.



Yukarıdaki şekilde $|KO| = |OM|$, $|LP| = |PN|$, $|OR| = |RP|$, $[ZR] \perp [OP]$, $m(\widehat{OZP}) = 40^\circ$, en iyi izleme mesafesi $|ZR|$ ve televizyonun genişliği $|OP|$ dur. $(\tan 20^\circ = 0{,}36)$

Yeni bir televizyon alırken Ahmet Bey'e sunulan bazı televizyon modelleri ve genişlikleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Marka	Genişlik (cm)
A	190
B	188
C	174
D	166
E	144

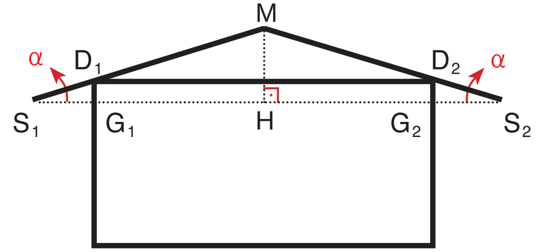
Buna göre

a) E marka televizyonu seçen Ahmet Bey'in izleme mesafesini yaklaşık kaç cm olarak ayarlaması gerektiğini hesaplayınız.

b) Televizyonu koyacağı odada izleme mesafesini en fazla 240 cm olarak ayarlayabilen Ahmet Bey'in hangi marka televizyonları <u>seçemeyeceğini</u> belirleyiniz.

c) İzleme mesafesi $|ZR| = y$, televizyonun genişliği $|OP| = x$ olduğuna göre izleme mesafesini veren denklemi yazınız.

52. Aşağıda verilen şekildeki gibi bir çatının eğimi, mahya yüksekliğinin ($|MH|$) saçak ucunun (S_1 veya S_2) mahyaya olan yatay uzaklığına ($|S_1H|$) oranı şeklinde hesaplanmaktadır.
Ayrıca çatı standartları
I. Çatı eğimi $\tan\alpha$ 0,45 i geçemez.
II. Mahya yüksekliği ($|MH|$) 5 metreyi geçemez.
III. Saçak genişliği ($|S_1G_1|$ ve $|S_2G_2|$) 0,6 metreyi geçemez şeklinde belirlenmiştir.



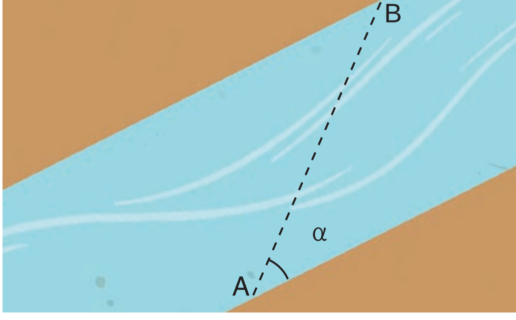
Aşağıdaki soruları yukarıda verilen bilgilere göre çözünüz.

a) Çatısının mahya yüksekliğini 5 metre, saçak genişliğini 0,5 metre ve eğimini 0,4 olacak şekilde standartlara uygun olarak yaptırmayı planlayan Aylin Hanım'ın binasının genişliğini hesaplayınız.

b) Aylin Hanım 24 metre genişliğindeki binasının çatısını saçak genişliği 0,6 metre, eğimi 0,4 olacak şekilde yaptırsaydı çatının standartlara uyup uymayacağını belirleyiniz.

c) Aylin Hanım 24 metre genişliğindeki binanın mahya yüksekliğini 5 metre ve çatısını saçaksız yaptırdığına göre $|D_1M| + |MD_2|$ değerini hesaplayarak çatının standartlara uyup uymadığını belirleyiniz.

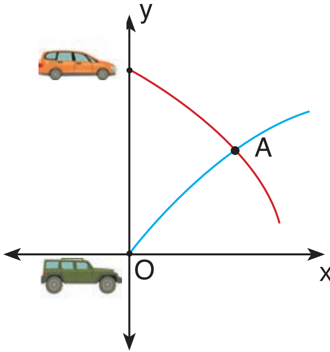
53.



Görseldeki kıyıları paralel olan nehirde bir yüzücü A noktasından α açısıyla karşı kenardaki B noktasına doğrusal biçimde yüzmektedir. Yüzücünün herhangi bir x anında aldığı yol $f(x) = \sec\left(\frac{1}{2} \cdot x \cdot \alpha\right)$ fonksiyonu ile modelleniyor.

Buna göre $x = 4$ anında yüzücünün bulunduğu noktanın kıyıya olan uzaklığının α türünden değerini bulunuz.

54.



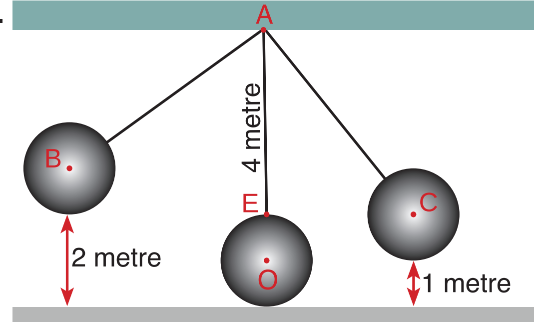
Bir koordinat düzleminde y ekseni üzerinde bulunan birinci araç $y = 4 \cdot \sin 2x$ grafiği üzerinden harekete başladıktan sonra $y = 3 \cdot \cos 2x$ grafiği üzerinden hareket eden ikinci araç ile A noktasındaki dinlenme tesisinde karşılaşıyor.

Buna göre $\tan x$ değerini bulunuz.

55. Okçuluk eğitimine yeni başlayan Yeşim'in atış sırasında hedef tahtasına uzaklığı 300 cm'dir. Yapmış olduğu birinci atışın yerden yüksekliği 280 cm, ikinci atışın yerden yüksekliği 220 cm'dir.

Yerden 140 cm yükseklikten oku atan Yeşim'in 1. atışı ile 2. atışı arasındaki açının tanjantını bulunuz.

56.



Yukarıdaki şekilde ip uzunluğu 4 metre olan bir sarkacın O, B ve C konumları verilmiştir.

Sarkacın ucundaki kürenin çapının uzunluğu 2 metre olduğuna göre $\sin(\widehat{BAC})$ değerini bulunuz.

Daha fazla soruya ulaşmak için karekodu okutunuz



GEOMETRİ

4. DÖNÜŞÜMLER

4.1. ANALİTİK DÜZLEMDE TEMEL DÖNÜŞÜMLER

Bu Bölümde Neler Öğreneceksiniz?

Analitik Düzlemde Temel Dönüşümler

- Analitik düzlemde koordinatları verilen bir noktanın öteleme, dönme ve simetri dönüşümleri altındaki görüntüsünün koordinatlarını bulmayı,
- Temel dönüşümler ve temel dönüşümlerin bileşkeleri ile ilgili problem çözmeyi öğreneceksiniz.



Alt öğrenme alanı karekodu

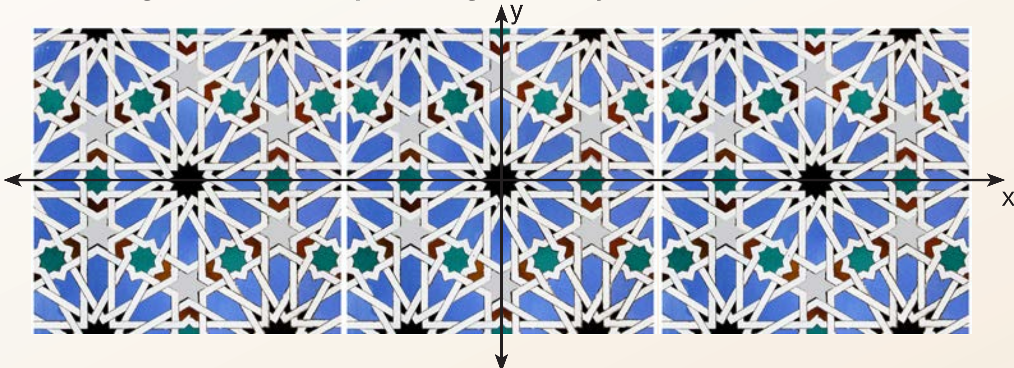
Alt öğrenme alanı sunu karekodu



Hazırlık Çalışması

Türklerde, iç ve dış mimaride süslemenin en renkli kolu olan çini sanatı, asıl büyük ve sürekli gelişimini Anadolu'da göstermiştir. Çeşitli tekniklerle zenginleşen bu sanat, daima mimariye bağlı kalmış ve onun üstünlüğüne gölge düşürmediği gibi renkli bir atmosfer yaratarak binaların mekân etkisini de artırmıştır. Anadolu Selçukluları ile çeşitli tiplerdeki mimari eserler üzerinde büyük bir gelişme gösteren çini sanatı, varlığını günümüze kadar sürdürmüştür.

Buna göre aşağıda verilen çini örneğinde 6 köşeli yıldızların içini kurşun kalemle boyayınız. Boyadığınız bu yıldızların ortadaki 12 kollu yıldızın etrafında olduğunu, bu durumun her bir karoda tekrar ettiğini gözlemleyip şeklin ortası orijin olacak şekilde analitik düzleme yerleştirildiğinde karonun eksenlere göre simetrik olup olmadığını inceleyiniz.



4.1. ANALİTİK DÜZLEMDE TEMEL DÖNÜŞÜMLER

Terimler ve Kavramlar

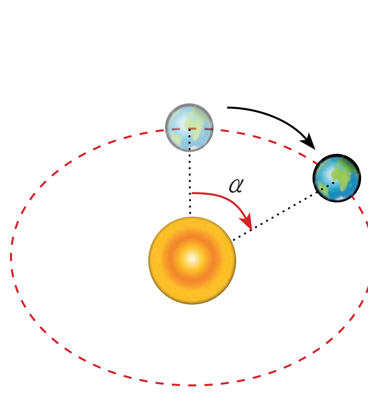
- **Dönüşüm**
- **Öteleme**
- **Dönme**
- **Dönme merkezi**
- **Dönme açısı**
- **Simetri**
- **Simetri merkezi**
- **Simetri ekseni**

Temel Dönüşümler

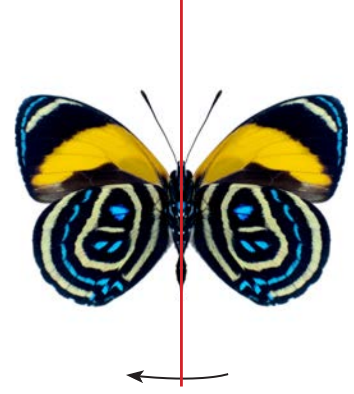
Geometrik dönüşümler sadece matematikte değil aynı zamanda sanatta, mimaride, doğada ve teknolojide de çok sık karşımıza çıkar. Dönüşüm geometrisinde temel dönüşümler olarak adlandırılan dönüşümler öteleme, dönme ve simetri dönüşümleridir.



Görsel 4.1: Öteleme dönüşümü



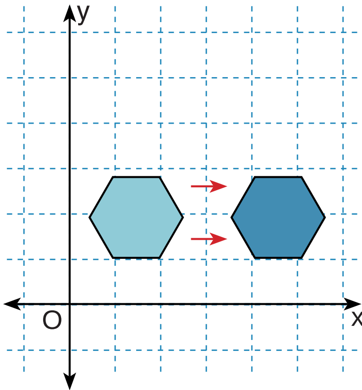
Görsel 4.2: Dönme dönüşümü


Görsel 4.3: Simetri dönüşümü

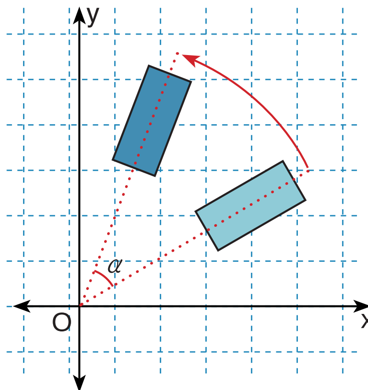
Ders İçi Uygulama 1

Bireysel Çalışma

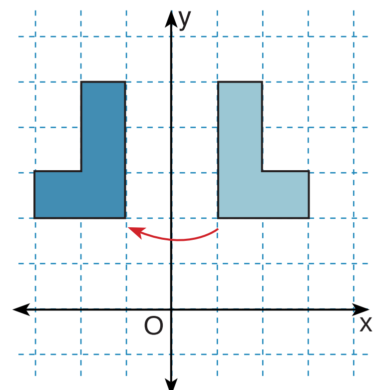
1. Analitik düzlemde aşağıda gösterilen dönüşümlerin adlarını grafiklerin altına yazınız.



.... dönüşümü

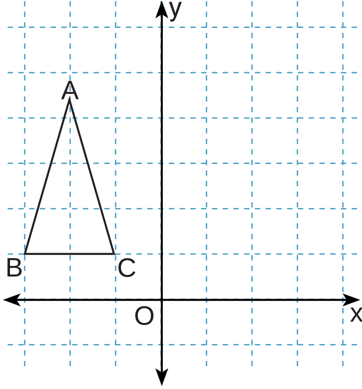


.... dönüşümü

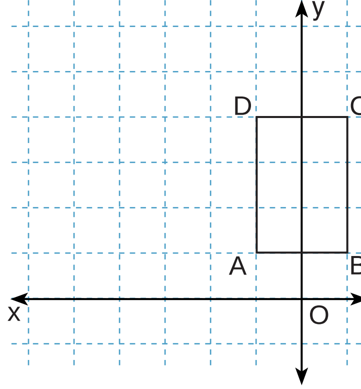


.... dönüşümü

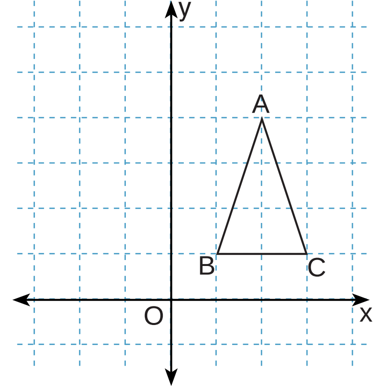
2. Aşağıdaki analitik düzlemde ABC üçgeni x ekseni boyunca pozitif yönde (sağa) 3 birim ötelendiğinde oluşan üçgeni çiziniz.



3. Aşağıdaki analitik düzlemde ABCD dörtgeni orijine göre pozitif yönde (saat yönünün tersi) 90° döndürüldüğünde oluşan dörtgeni çiziniz.

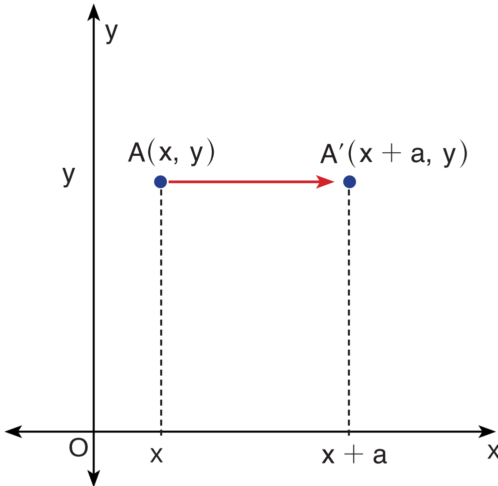


4. Aşağıdaki analitik düzlemde ABC üçgeninin y eksenine göre simetriğini çiziniz.

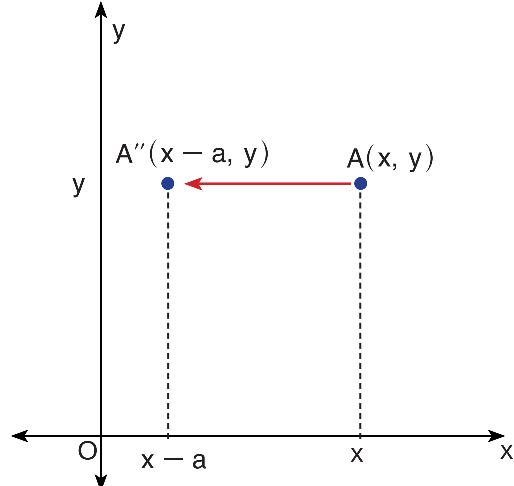


Öteleme Dönüşümü

Analitik düzlemde bir şeklin belirli bir doğrultuda veya yönde yer değiştirmesine **öteleme** denir. Temel olarak öteleme, şeklin sadece konumundaki değişikliktir. Öteleme dönüşümü ile şeklin konumu değişir ancak biçimi, yönü ve boyutu değişmez.

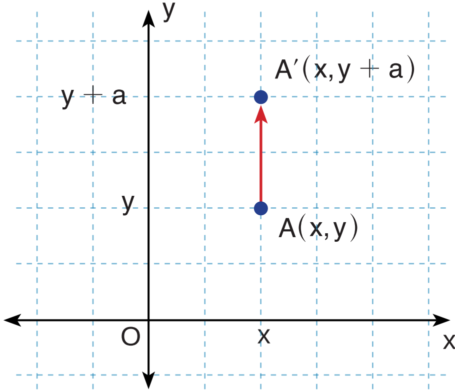


$A(x, y)$ noktasının x ekseni doğrultusunda, pozitif yönde (sağa doğru) a birim ötelenmesi ile $A'(x + a, y)$ noktası elde edilir.

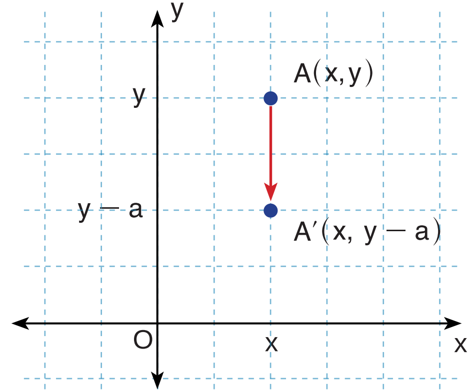


$A(x, y)$ noktasının negatif yönde (sola doğru) a birim ötelenmesi ile $A''(x - a, y)$ noktası elde edilir.

Analitik düzlemde koordinatları verilen bir A noktası y ekseni doğrultusunda, pozitif yönde a birim ötelendiğinde noktanın ordinatı a birim artar. y ekseni doğrultusunda, negatif yönde a birim ötelendiğinde ise noktanın ordinatı a birim azalır. Bu nokta y ekseni doğrultusunda ötelendiğinde noktanın apsisi değişmez.



$A(x,\ y)$ noktasının y ekseni doğrultusunda, pozitif yönde (yukarı) a birim ötelenmesi ile $A'(x,\ y+a)$ noktası elde edilir.



$A(x,\ y)$ noktasının y ekseni doğrultusunda, negatif yönde (aşağı) a birim ötelenmesi ile $A'(x,\ y-a)$ noktası elde edilir.

Noktanın ordinatı, nokta y ekseni boyunca yukarı öteleniyorsa artar; aşağı öteleniyorsa azalır ve noktanın apsisi değişmez.

Bilgi

$A(x_1,\ y_1)$ noktasının x ekseni doğrultusunda, pozitif yönde a birim; y ekseni doğrultusunda, pozitif yönde b birim ötelenmesiyle elde edilen nokta $A'(x_2,\ y_2)$ olmak üzere
$A'(x_2,\ y_2) = (x_1,\ y_1) + (a,\ b) = (x_1 + a,\ y_1 + b)$ olur.

1. ÖRNEK

$A(3,\ -2)$ noktasının x ekseni doğrultusunda, pozitif yönde (sağa) 4 birim; y ekseni doğrultusunda, negatif yönde (aşağı) 5 birim ötelenmesi ile elde edilen A' noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(x_1,\ y_1)$ olsun. Bu durumda

$A'(x_2,\ y_2) = (3,\ -2) + (4,\ -5)$

$= A'(3+4,\ -2+(-5)) = A'(7,\ -7)$ olur.

2. ÖRNEK

A noktasının x ekseni doğrultusunda, negatif yönde (sola) 2 birim; y ekseni doğrultusunda, pozitif yönde (yukarı) 3 birim ötelenmesi ile $A'(1,\ 4)$ noktası elde edilmiştir.
Buna göre A noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(x_1,\ y_1)$ olsun. Bu durumda

$A'(1,\ 4) = (x_1,\ y_1) + (-2,\ 3) = (x_1 - 2,\ y_1 + 3)$ olur.

$1 = x_1 - 2 \Rightarrow x_1 = 3$

$4 = y_1 + 3 \Rightarrow y_1 = 1$ elde edilir.

$A(3,\ 1)$ bulunur.

3. ÖRNEK

Yandaki şekilde köşe koordinatları A(2, 2), B(6, − 1) ve C(9, 6) olan üçgenin x ekseni doğrultusunda 2 birim sola ve y ekseni doğrultusunda 1 birim yukarı ötelenmesiyle A′B′C′ üçgeni elde ediliyor.

Buna göre analitik düzlemde A′B′C′ üçgenini çiziniz.

ÇÖZÜM

$A'(x_1, y_1) = (2, 2) + (-2, 1)$
$x_1 = 2 - 2 = 0$
$y_1 = 2 + 1 = 3$ olur.

A′(0, 3) bulunur.
$B'(x_2, y_2) = (6, -1) + (-2, 1)$
$x_2 = 6 - 2 = 4$
$y_2 = -1 + 1 = 0$ olur.
B′(4, 0) bulunur.

$C'(x_3, y_3) = (9, 6) + (-2, 1)$
$x_3 = 9 - 2 = 7$
$y_3 = 6 + 1 = 7$ olur.
C′(7, 7) bulunur. Böylece A′, B′ ve C′ noktaları analitik düzlemde birleştirilerek $\widehat{A'B'C'}$ çizilir.

Ders İçi Uygulama 2 — Bireysel Çalışma

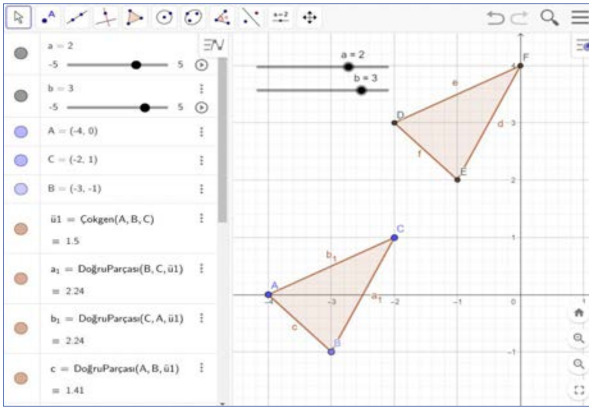
1. A(2, 5) noktasının x ekseni doğrultusunda, negatif yönde (sola) a birim; y ekseni doğrultusunda, pozitif yönde (yukarı) b birim ötelenmesi ile A′(−2, 7) noktası elde edilmiştir. Buna göre a + b değerini bulunuz.

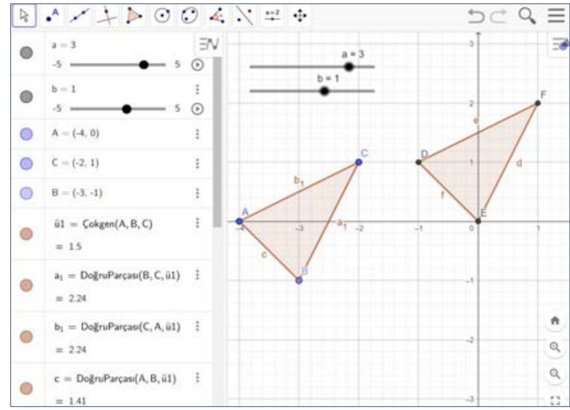
2. Köşeleri A(−3, 4), B(−6, 5) ve C(1, 5) olan üçgenin x ekseni doğrultusunda, pozitif yönde (sağa) 3 birim; y ekseni doğrultusunda, negatif yönde (aşağı) 5 birim ötelenmesi ile elde edilen üçgenin köşelerinin koordinatlarını bulunuz.

Ders İçi Uygulama 3 — Teknoloji

Dinamik matematik programı kullanarak herhangi bir çokgenin x veya y ekseni doğrultusunda ötelenmesini incelemek için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. Adım: Giriş kısmına ayrı ayrı **a = 2** ve **b = 3** yazılarak a ve b sürgüleri oluşturulur.
2. Adım: Çokgen aracı seçildikten sonra grafik alanında herhangi farklı üç nokta tıklanarak bir ABC üçgeni oluşturulur.
3. Adım: Giriş kısmına ayrı ayrı **A+(a,b), B+(a,b) ve C+(a,b)** yazılarak ötelenmiş olan üçgenin D, E ve F köşeleri elde edilir.
4. Adım: Giriş kısmına **Çokgen(D,E,F)** yazılarak ötelenmiş olan DEF üçgeni oluşturulur.
5. Adım: ABC üçgeninin köşe noktaları veya sürgüler hareket ettirilerek öteleme dönüşümü test edilir.


ABC üçgeni 2 birim sağa ve 3 birim yukarı ötelenmiştir.


ABC üçgeni 3 birim sağa ve 1 birim yukarı ötelenmiştir.

Dinamik matematik programı kullanarak $A(1, 2)$, $B(-1, 3)$, $C(-2, -2)$ ve $D(3, -1)$ noktalarından geçen çokgeni çiziniz. Bu çokgeni oluşturacağınız m ve n sürgülerini kullanarak x ekseni boyunca m birim ve y ekseni boyunca n birim öteleyiniz.

4. ÖRNEK

$d: 3x - y - 6 = 0$ doğrusu x ekseni doğrultusunda 2 birim sola, y ekseni doğrultusunda 3 birim yukarı ötelendiğinde oluşan doğrunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

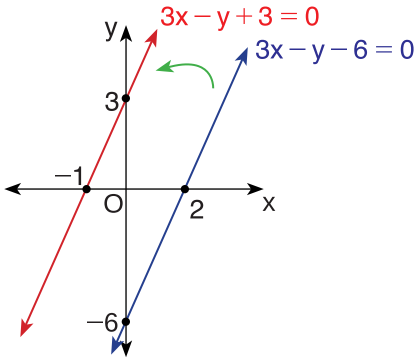
$3x - y - 6 = 0$ doğrusunun üzerindeki herhangi bir nokta $A(x_1, y_1)$ olsun. Bu doğru x ekseni doğrultusunda 2 birim sola, y ekseni doğrultusunda 3 birim yukarı ötelendiğinde A noktasının yeni konumu $A'(x_2, y_2)$ olsun.

$A'(x_2, y_2) = (x_1, y_1) + (-2, 3)$ olur.

$x_2 = x_1 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2 + 2$

$y_2 = y_1 + 3 \Rightarrow y_1 = y_2 - 3$ bulunur.

$A(x_1, y_1)$ noktası $3x - y - 6 = 0$ doğrusu üzerinde olduğu için $3x_1 - y_1 - 6 = 0$ denklemi sağlanır.



Buradan $x_1 = x_2 + 2$ ve $y_1 = y_2 - 3$ değerleri doğru denkleminde yerlerine yazılırsa

$3(x_2 + 2) - (y_2 - 3) - 6 = 0$

$3x_2 + 6 - y_2 + 3 - 6 = 0$

$3x_2 - y_2 + 3 = 0$ elde edilir.

Buradan öteleme sonucunda elde edilen yeni doğrunun denklemi $3x - y + 3 = 0$ bulunur.

5. ÖRNEK

$m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $x + 2y - 6 = 0$ doğrusu x ekseni doğrultusunda m birim sağa, y ekseni doğrultusunda n birim yukarı ötelenerek $x + 2y - 16 = 0$ doğrusu elde ediliyor.
Buna göre (m, n) ikililerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x + 2y - 6 = 0$ doğrusu üzerindeki noktalar $A'(x, y)$ olsun.
$x + 2y - 6 = 0$ doğru denkleminde x yerine $x - m$ ve y yerine $y - n$ yazılırsa

$(x - m) + 2(y - n) - 6 = 0$

$x - m + 2y - 2n - 6 = 0$ bulunur.

Bu doğru denklemi ile $x + 2y - 16 = 0$ doğru denklemi birbirine çakışık olduğundan

$x - m + 2y - 2n - 6 = x + 2y - 16$

$x + 2y - m - 2n - 6 = x + 2y - 16$

$-m - 2n = -10 \Rightarrow m + 2n = +10$ olur.

Buradan $m, n \in \mathbb{Z}^+$ koşulunu sağlayan (m, n) ikilileri $\{(8, 1), (6, 2), (4, 3), (2, 4)\}$ biçiminde elde edilir.

Ders İçi Uygulama 4 — Bireysel Çalışma

1. $x - 2y + 1 = 0$ doğrusunun x ekseni doğrultusunda, pozitif yönde (sağa) 4 birim; y ekseni doğrultusunda, negatif yönde (aşağı) 4 birim ötelenmesi ile elde edilen doğrunun denklemini bulunuz.

2. Bir d doğrusunun x ekseni doğrultusunda, negatif yönde (sola) 1 birim; y ekseni doğrultusunda, pozitif yönde (yukarı) 2 birim ötelenmesi ile $2x - y - 1 = 0$ doğrusu elde ediliyor.
Buna göre d doğrusunun denklemini bulunuz.

6. ÖRNEK

$y = x^2 + 2x + 1$ biçiminde verilen parabolün x ekseni doğrultusunda 4 birim sağa ve y ekseni doğrultusunda 1 birim aşağı ötelenmesiyle oluşan yeni parabolün denklemini bulup elde edilen yeni parabolü analitik düzlemde gösteriniz.

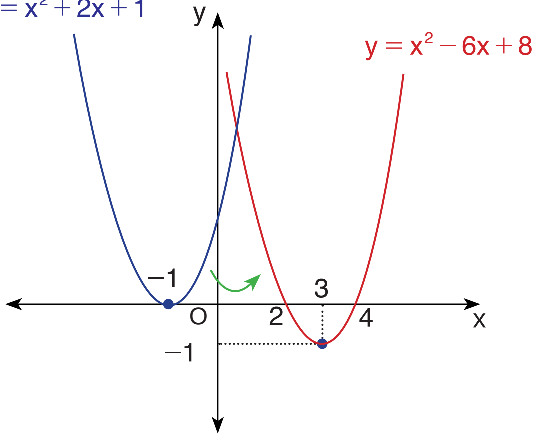
ÇÖZÜM

Parabol üzerinde alınan herhangi bir nokta $A(x_1, y_1)$ ve ötelenmiş nokta $A'(x_2, y_2)$ olsun.

$A'(x_2, y_2) = A(x_1, y_1) + (4, -1)$

$x_2 = x_1 + 4 \Rightarrow x_1 = x_2 - 4$

$y_2 = y_1 - 1 \Rightarrow y_1 = y_2 + 1$ olur.



$A(x_1, y_1)$ noktası parabolün üzerinde olduğu için $y_1 = x_1^2 + 2x_1 + 1$ denklemi sağlanır. Bu denklemde $x_1 = x_2 - 4$ ve $y_1 = y_2 + 1$ değerleri yerine yazılırsa

$y_2 + 1 = (x_2 - 4)^2 + 2(x_2 - 4) + 1$

$y_2 + 1 = x_2^2 - 8x_2 + 16 + 2x_2 - 8 + 1$

$y_2 = x_2^2 - 6x_2 + 8$ olur.

$y = x^2 + 2x + 1$ parabolünün ötelenmesiyle oluşan parabolün denklemi $y = x^2 - 6x + 8$ şeklinde bulunur.

Ders İçi Uygulama 5 — Bireysel Çalışma

Aşağıdaki tabloda sol sütundaki ifadeler x ekseni doğrultusunda, negatif yönde (sola) 2 birim; y ekseni doğrultusunda, pozitif yönde (yukarı) 3 birim ötelenerek sağ sütuna yazılmıştır.
Buna göre tabloda boş bırakılan yerlere uygun bilgileri yazınız.

İfade	Ötelenmiş Hâli
$A(2, -1)$	
	$B'(-5, 4)$
$d: 2x + y - 4 = 0$	
	$d': 4x - 3y - 12 = 0$
$y = x^2 - 1$	
	$y = x^2 + 2x + 6$

1. Analitik düzlemdeki herhangi bir A noktasının x ekseni doğrultusunda 4 birim sola, y ekseni doğrultusunda 1 birim yukarı ötelenmesiyle A' noktası elde edilmiştir.

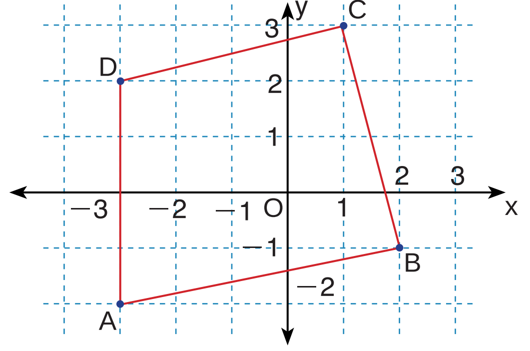
Buna göre aşağıda verilen tablodaki boşlukları doldurunuz.

	A	A′
a)	$(1, -2)$	
b)		$(0, 0)$
c)	$(-2, -4)$	
ç)		$(3, -2)$
d)	(π, e)	

2. (a, b) **noktası analitik düzlemde 4 birim sağa ve 5 birim aşağı ötelendiğinde** $(-1, -4)$ **noktası elde edildiğine göre** $a + b$ **değerini bulunuz.**

3. $A(1, 2)$ **ve** $B(-1, 3)$ **noktalarından geçen d doğrusu ile bu doğrunun 2 birim yukarı ve 1 birim sola ötelenmesi ile elde edilen** d' **doğrusunun grafiğini çiziniz. Öteleme sonucu bu doğruların değişen veya değişmeyen özelliklerini karşılaştırınız.**

4.



Yukarıdaki ABCD dörtgeninin x ekseni doğrultusunda 2 birim sola, y ekseni doğrultusunda 3 birim aşağı ötelenmesi ile oluşan $A'B'C'D'$ **dörtgenini çiziniz.**

5. Aşağıda verilen doğruların x ekseni doğrultusunda 2 birim sağa ve y ekseni doğrultusunda 3 birim aşağı ötelenmesiyle oluşan doğruların denklemini yazınız.

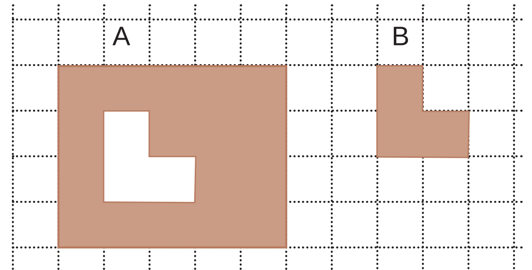
a) $y - 3x + 2 = 0$

b) $x = 2y - 1$

c) $y = -1$

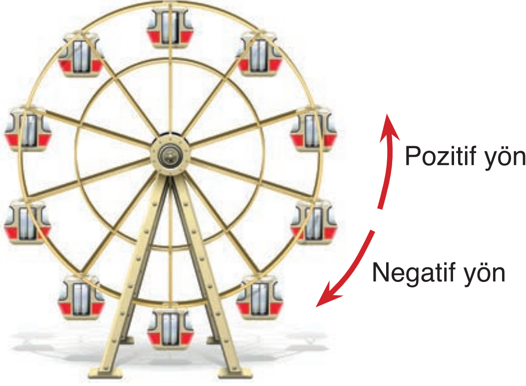
ç) $x = 0$

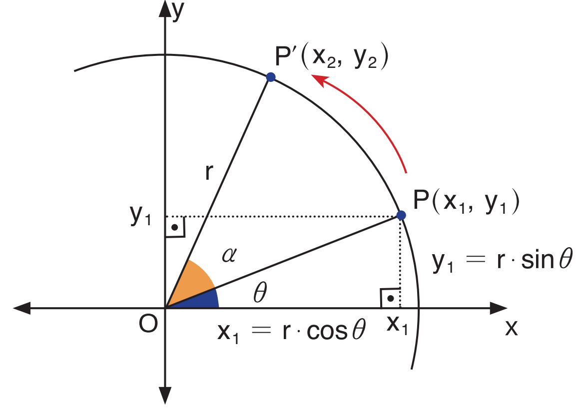
6. Aşağıda bir eş kareli kâğıt üzerinde A ve B şekilleri verilmiştir. A şekli içerisindeki boşluğa B şeklinin gelmesi için yapılması gereken öteleme dönüşümünü bulunuz.



Dönme Dönüşümü

Şeklin bir nokta etrafında belirli bir açıyla saat yönünde (negatif yön) ya da saatin tersi yönünde (pozitif yön) döndürülmesine **dönme dönüşümü** denir. Dönme dönüşümü esnasında konumu değişmeyen noktaya **dönme merkezi** denir.





Düzlemde bir P noktası verilsin. [OP] nın x ekseni ile yaptığı pozitif yönlü açının ölçüsü θ olsun. P noktasının pozitif yönde, orijin etrafında α derece döndürülmesi ile bulunan nokta P' noktası olsun.

$P(x_1, y_1)$ noktası $|OP| = r$ olmak üzere $x_1 = r \cdot \cos\theta$ ve $y_1 = r \cdot \sin\theta$ olduğundan $P'(x_2, y_2)$ noktası

$x_2 = r \cdot \cos(\alpha + \theta)$

$y_2 = r \cdot \sin(\alpha + \theta)$ biçiminde olur.

Toplam formüllerinden

$x_2 = r(\cos\theta \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\theta)$

$y_2 = r(\sin\alpha \cdot \cos\theta + \cos\alpha \cdot \sin\theta)$ bulunur.

Bu denklemler düzenlenirse

$$x_2 = \underbrace{r \cdot \cos\theta}_{x_1} \cdot \cos\alpha - \underbrace{r \cdot \sin\theta}_{y_1} \cdot \sin\alpha \Rightarrow x_2 = x_1 \cdot \cos\alpha - y_1 \cdot \sin\alpha$$

$$y_2 = \underbrace{r \cdot \cos\theta}_{x_1} \cdot \sin\alpha + \underbrace{r \cdot \sin\theta}_{y_1} \cdot \cos\alpha \Rightarrow y_2 = x_1 \cdot \sin\alpha + y_1 \cdot \cos\alpha \text{ elde edilir.}$$

P' noktası $P'(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha,\ x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha)$ biçiminde elde edilir.

Bilgi

$P(x, y)$ noktasının orijin etrafında, pozitif yönde α açısı kadar döndürülmesi ile elde edilen P' noktası
$P' = R_\alpha(P) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha)$ biçiminde bulunur.
Buradan R_α ya **dönme dönüşümü**, α ya ise **dönme açısı** denir.

$P(x, y)$ noktasının orijin etrafında, negatif yönde α açısı kadar döndürülmesi ile elde edilen P' noktası

$P' = R_{-\alpha}(P)$

$= (x\cos(-\alpha) - y\sin(-\alpha),\ x\sin(-\alpha) + y\cos(-\alpha))$

$= (x\cos\alpha + y\sin\alpha,\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha)$ biçiminde bulunur.

Özel olarak $P(x, y)$ noktasının

I. Orijin etrafında, pozitif yönde 90° döndürülmesi ile

$$R_{90^\circ}(P) = (x\underbrace{\cos 90^\circ}_{0} - y\underbrace{\sin 90^\circ}_{1},\ x\underbrace{\sin 90^\circ}_{1} + y\underbrace{\cos 90^\circ}_{0})$$

$R_{90^\circ}(x, y) = (-y, x)$ bulunur.

II. Orijin etrafında 180° döndürülmesi ile

$$R_{180^\circ}(P) = (x\underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} - y\underbrace{\sin 180^\circ}_{0},\ x\underbrace{\sin 180^\circ}_{0} + y\underbrace{\cos 180^\circ}_{-1})$$

$= (-x, -y)$ bulunur.

III. Orijin etrafında, pozitif yönde 270° döndürülmesi ile

$$R_{270^\circ}(P) = (x\underbrace{\cos 270^\circ}_{0} - y\underbrace{\sin 270^\circ}_{-1},\ x\underbrace{\sin 270^\circ}_{-1} + y\underbrace{\cos 270^\circ}_{0})$$

$= (y, -x)$ bulunur.

Sonuç olarak herhangi bir (x, y) noktasının orijin etrafında, pozitif yönde 90°, 180° ve 270° döndürülmesi ile elde edilen noktalar aşağıdaki gibi ifade edilir.

$\mathbf{R_{90^\circ}(x, y) = (-y, x)}$

$\mathbf{R_{180^\circ}(x, y) = (-x, -y)}$

$\mathbf{R_{270^\circ}(x, y) = (y, -x)}$

7. ÖRNEK

$A(2, -3)$ noktasının orijin etrafında, pozitif yönde 90°, 180° ve 270° döndürülmesi ile elde edilen noktalar sırasıyla B, C ve D dir. Bu noktaların koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(x, y)$ noktasının orijin etrafında, pozitif yönde 90° döndürülmesi ile

$R_{90^\circ}(A) = (x\cos 90^\circ - y\sin 90^\circ,\ x\sin 90^\circ + y\cos 90^\circ)$

$R_{90^\circ}(x, y) = (-y, x)$ bulunur.

$R_{90^\circ}(2, -3) = (3, 2) \Rightarrow B(3, 2)$ olur.

$A(x, y)$ noktasının orijin etrafında 180° döndürülmesi ile

$R_{180^\circ}(A) = (x\cos 180^\circ - y\sin 180^\circ,\ x\sin 180^\circ + y\cos 180^\circ)$

$R_{180^\circ}(x, y) = (-x, -y)$ bulunur.

$R_{180^\circ}(2, -3) = (-2, 3) \Rightarrow C(-2, 3)$ olur.

$A(x, y)$ noktasının orijin etrafında, pozitif yönde 270° döndürülmesi ile

$R_{270^\circ}(A) = (x\cos 270^\circ - y\sin 270^\circ,\ x\sin 270^\circ + y\cos 270^\circ)$

$R_{270^\circ}(x, y) = (y, -x)$ bulunur.

$R_{270^\circ}(2, -3) = (-3, -2) \Rightarrow D(-3, -2)$ olur.

8. ÖRNEK

$A(4,-2)$ noktasının orijin etrafında, pozitif yönde 90° döndürülmesi ile elde edilen noktayı bulunuz.

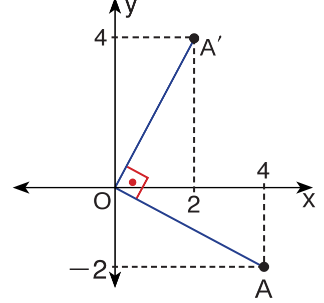
ÇÖZÜM

$A(x, y)$ noktasının orijin etrafında, pozitif yönde 90° döndürülmesi ile elde edilen nokta A' olmak üzere

$A' = R_\alpha(A) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha)$

$A' = R_\alpha(4, -2) = (4\cos 90^\circ - (-2)\sin 90^\circ,\ 4\sin 90^\circ + (-2)\cos 90^\circ)$

$= (2, 4)$ bulunur.



9. ÖRNEK

$A(-2\sqrt{3}, 2)$ noktasının orijin etrafında, saat yönünde 30° döndürülmesi ile elde edilen noktayı bulunuz.

ÇÖZÜM

A noktası orijin etrafında, saat yönünde 30° döndürüldüğünde $R_\alpha(A)$ dönme dönüşümünde $\alpha = -30^\circ$ alınır.

$$R_\alpha(-2\sqrt{3}, 2) = (-2\sqrt{3}\cos(-30^\circ) - 2\sin(-30^\circ),\ -2\sqrt{3}\sin(-30^\circ) + 2\cos(-30^\circ))$$

$$= (-2\sqrt{3}\cos 30^\circ + 2\sin 30^\circ,\ 2\sqrt{3}\sin 30^\circ + 2\cos 30^\circ)$$

$$= \left(-\cancel{2}\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} + \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}},\ \cancel{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} + \cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) = (-2, 2\sqrt{3}) \text{ bulunur.}$$

Bu durumda A noktasının orijin etrafında, saat yönünde 30° döndürülmesiyle elde edilen nokta $A'(-2, 2\sqrt{3})$ olur.

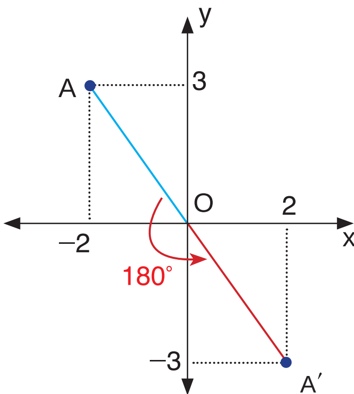
10. ÖRNEK

$A(-2, 3)$ noktasının orijin etrafında, pozitif yönde α derece döndürülmesiyle $A'(2, -3)$ noktası elde ediliyor.

Buna göre α açısının kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Yol



Noktalar analitik düzlemde gösterilirse α açısının 180° olduğu görülür.

II. Yol

$A'(2, -3) = R_{\alpha}(A) = (-2\cos\alpha - 3\sin\alpha, -2\sin\alpha + 3\cos\alpha)$ olur.

$-2\cos\alpha - 3\sin\alpha = 2$

$-2\sin\alpha + 3\cos\alpha = -3$ bulunur.

Bu denklem sistemi ortak çözüldüğünde

$3 \,/\, -2\cos\alpha - 3\sin\alpha = 2$

$2 \,/\, -2\sin\alpha + 3\cos\alpha = -3$

$-6\cos\alpha - 9\sin\alpha = 6$

$+\quad -4\sin\alpha + 6\cos\alpha = -6$

$-13\sin\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0$ olur.

Denklemlerden birinde $\sin\alpha$ yerine 0 derece yazılırsa $\cos\alpha = -1$ bulunur. Buradan $\alpha = 180^\circ$ elde edilir.

11. ÖRNEK

Analitik düzlemin IV. bölgesindeki $A = (5\sqrt{3}, n)$ noktasının orijine uzaklığı 10 birimdir.
Buna göre A noktasının orijin etrafında, negatif yönde 150º döndürülmesi ile elde edilen A' noktasını bulunuz.

ÇÖZÜM

A noktasından x eksenine çizilen dikme noktası H ve $|AH| = n$ birim olmak üzere AHO dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$|AH|^2 + |OH|^2 = |OA|^2$

$n^2 + (5\sqrt{3})^2 = 10^2$

$n^2 = 100 - 75$

$n^2 = 25 \Rightarrow |n| = 5$ olur.

A noktası IV. bölgede olduğundan $n = -5$ olur. $A = (5\sqrt{3}, -5)$ noktası orijin etrafında, negatif yönde 150º döndürüldüğünde $R_{\alpha}(A)$ dönme dönüşümünde $\alpha = -150^\circ$ olarak alınır.

$$R_{\alpha}(5\sqrt{3}, -5) = (5\sqrt{3}\cos(-150^\circ) + 5\sin(-150^\circ), 5\sqrt{3}\sin(-150^\circ) - 5\cos(-150^\circ))$$

$$= (5\sqrt{3}\cos(150^\circ) - 5\sin(150^\circ), -5\sqrt{3}\sin(150^\circ) - 5\cos(150^\circ))$$

$$= \left(5\sqrt{3}\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) - 5\cdot\frac{1}{2}, -5\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} - 5\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right) = (-10, 0) \text{ bulunur.}$$

Bu durumda A noktasının orijin etrafında, saat yönünde 150° döndürülmesiyle elde edilen nokta $A'(-10, 0)$ olur.

Ders İçi Uygulama 6 — Bireysel Çalışma

Analitik düzlemde verilen $A(2, -5)$ noktasının orijin etrafında, pozitif yönde 90°, 180° ve 270° döndürülmesi ile elde edilen noktaları bulunuz.

12. ÖRNEK

$3x + 2y = 6$ doğrusunun orijin etrafında, pozitif yönde 90° döndürülmesiyle elde edilen doğrunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Yol

$3x + 2y = 6$ doğrusu üzerinde herhangi bir nokta $A(x_1, y_1)$ olsun. $A(x_1, y_1)$ noktasının orijin etrafında, pozitif yönde 90° döndürülmesi ile elde edilen nokta $A'(x_2, y_2)$ olmak üzere

$A'(x_2, y_2) = R_{90^\circ}(A(x_1, y_1))$

$= (x_1 \cos 90^\circ - y_1 \sin 90^\circ, x_1 \sin 90^\circ + y_1 \cos 90^\circ)$

$= (-y_1, x_1)$ bulunur.

$x_2 = -y_1 \Rightarrow y_1 = -x_2$

$y_2 = x_1 \Rightarrow x_1 = y_2$ olur.

$A(x_1, y_1)$ noktaları $3x + 2y = 6$ doğrusunun üzerinde olduğu için $3x_1 + 2y_1 = 6$ denklemi elde edilir.

$x_1 = y_2$ ve $y_1 = -x_2$ değerleri bu denklemde yerine yazılırsa

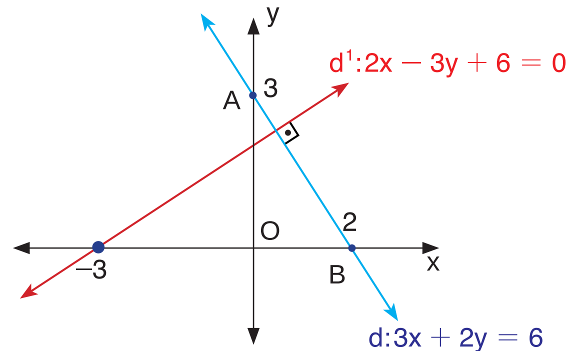
$3(y_2) + 2(-x_2) = 6$

$-2x_2 + 3y_2 = 6$ olur.

$2x - 3y = -6$ doğrusu elde edilir.

II. Yol

$3x + 2y = 6$ doğrusu üzerinde herhangi iki A ve B noktaları alınır. Bu noktalar orijin etrafında, pozitif yönde 90° döndürülerek A' ve B' noktaları elde edilir. A' ve B' noktaları ile eğimi ve bir noktası verilen doğrunun denklemi $y - y_1 = m(x - x_1)$ bağıntısı kullanılarak bulunur.



$3x + 2y = 6$ doğrusu üzerinde

$x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(0, 3)$

$y = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow B(2, 0)$

noktaları alınsın.

$A' = R_{90^\circ}(0, 3) = (-3, 0)$

$B' = R_{90^\circ}(2, 0) = (0, 2)$ bulunur.

A' ve B' noktalarından geçen doğrunun eğimi $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2 - 0}{0 - (-3)} = \dfrac{2}{3}$ olur.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ doğru denkleminde $A'(-3, 0)$ noktası ve $m = \dfrac{2}{3}$ eğimi yerine yazılırsa

$y - 0 = \frac{2}{3}(x + 3)$

$3y = 2x + 6$

$2x - 3y + 6 = 0$

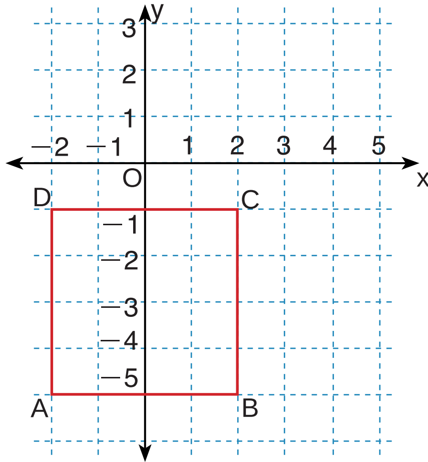
$2x - 3y = -6$ doğrusu elde edilir.

Ders İçi Uygulama 7 — Bireysel Çalışma

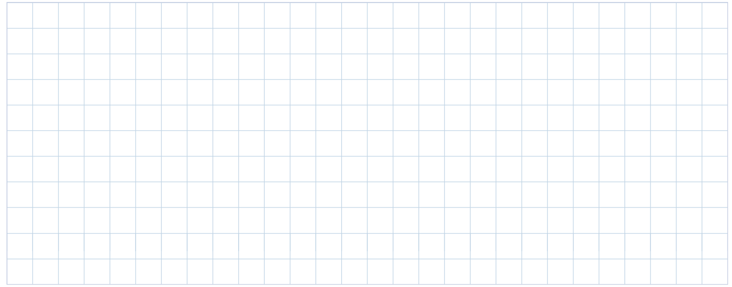
1. Aşağıdaki tabloda verilen ifadeleri verilen açı değerlerine göre orijin etrafında, pozitif yönde döndürüp bulduğunuz değerleri boşluklara yazınız.

	Dönme Açısı		
İfade	90°	180°	270°
$A(2, -5)$			
$B(0, 3)$			
$x = 3$			
$y = x - 1$			
$x + 2y = 0$			

2.



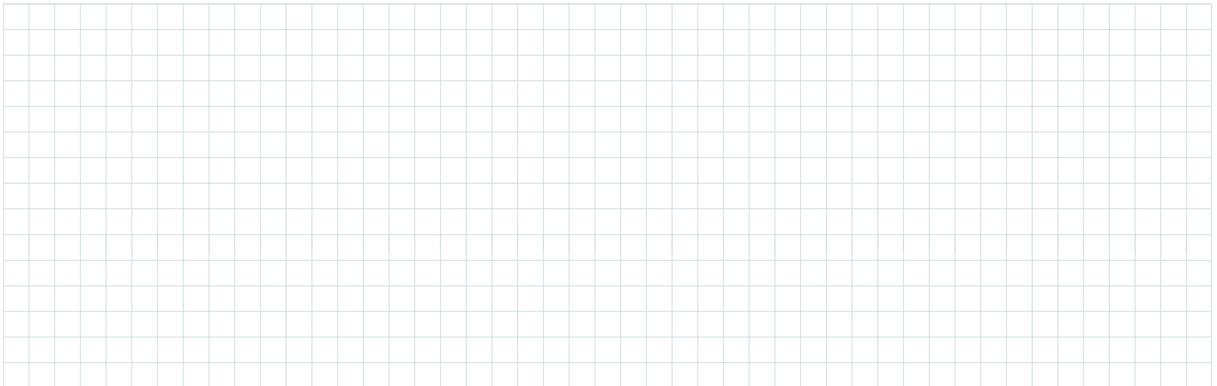
Yanda analitik düzlemde verilen ABCD karesinin orijin etrafında, pozitif yönde 90° döndürülmesiyle $A'B'C'D'$ karesi elde ediliyor.
ABCD karesi ile $A'B'C'D'$ karesinin kesişim bölgesinin alanını bulunuz.



3. $x - y + 2 = 0$ doğrusu orijin etrafında 90°, 180° ve 270° döndürülüyor.

Buna göre
a) Elde edilen doğruların denklemini bulunuz.

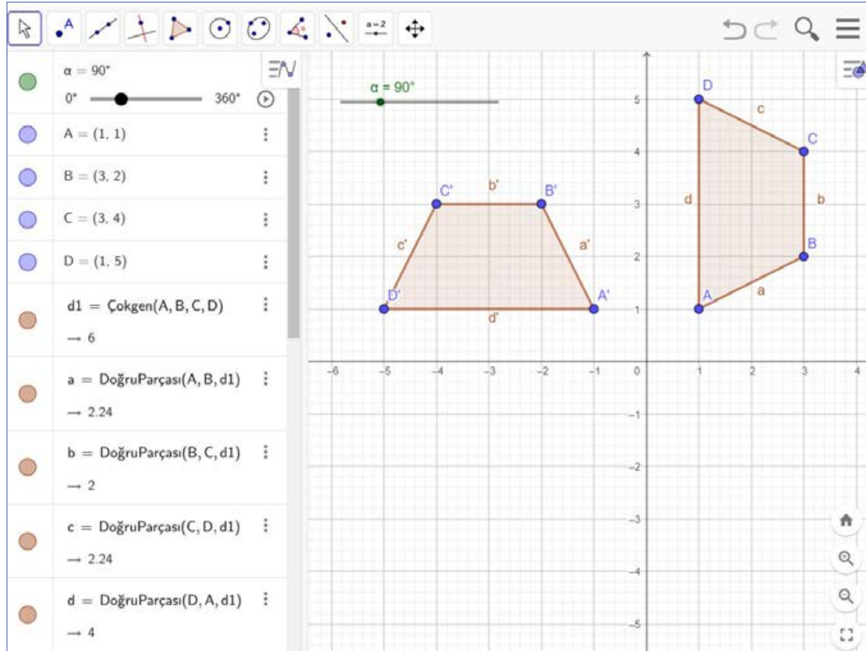
b) Elde edilen doğruların oluşturduğu kapalı bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.



Ders İçi Uygulama 8 — Teknoloji

Dinamik matematik programı kullanarak bir çokgeni orijin etrafında belli bir açı kadar döndürebilmek için aşağıdaki adımlar uygulanır:

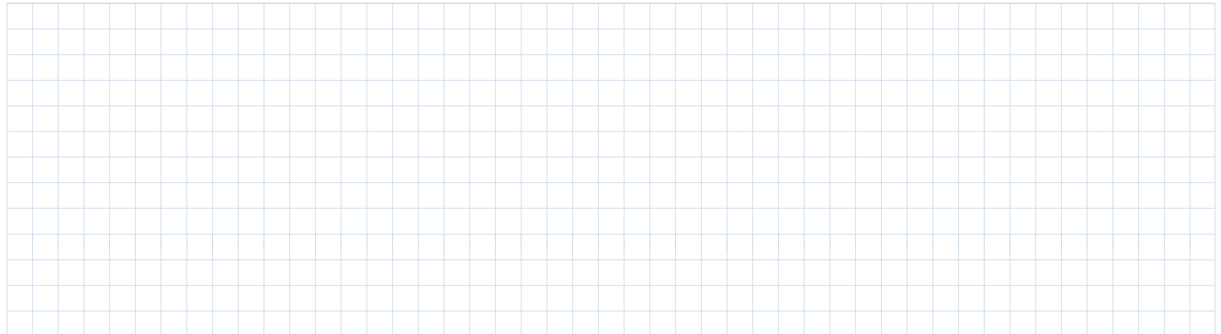
1. Adım: Giriş kısmına $\alpha = 60°$ yazılarak derece cinsinden α sürgüsü oluşturulur.
2. Adım: Giriş kısmına ayrı ayrı **(1,1)**, **(3,2)**, **(3,4)**, **(1,5)** yazılarak A, B, C ve D noktaları oluşturulur.
3. Adım: Giriş kısmına **Çokgen (A,B,C,D)** yazılarak d1 çokgeni oluşturulur.
4. Adım: Giriş kısmına **Döndür (d1,** α**)** yazılarak d1 çokgeninin orijin etrafında pozitif yönde döndürülmüşü olan d1′ çokgeni oluşturulur.
5. Adım: Sürgünün üzerine sağ tıklanarak canlandırma özelliği açılır.



Aşağıdaki soruları yukarıdaki örneğe göre cevaplayınız.

a) Sürgünün değeri 360° olduğunda d1 ve d1′ çokgenlerinin birbirine göre durumunu belirtiniz.

b) Köşe koordinatları (1, 2), (3, 0) ve (2, 3) olan üçgeni orijin etrafında pozitif yönde 270° döndürünüz.



ALIŞTIRMALAR 4.2

1. Aşağıdaki tabloda bazı noktalar ve dönme dönüşümünde kullanılmak üzere bazı dönme açıları verilmiştir. Verilen noktaların analitik düzlemde, orijin etrafında, pozitif yönde dönme dönüşümleri yapılacaktır.

Buna göre tabloda boş bırakılan yerlere uygun noktaları yazınız

Açılar / Noktalar	90°	180°	270°
$(1, 1)$		$(-1, -1)$	
$(-2, 3)$			
			$(-3, 4)$

2. Aşağıda koordinatları verilen noktaların orijin etrafında, pozitif yönde 30°, 45° ve 60° döndürülmesiyle oluşan yeni noktaların koordinatlarını bulunuz.

a) $A(1, 1)$

b) $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

c) $C(4, 4\sqrt{3})$

ç) $D(-3, -4)$

3. Aşağıda verilen noktaların orijin etrafında, negatif yönde $90^\circ, 180^\circ$ ve 270° döndürülmesiyle oluşan yeni noktaların koordinatlarını bulunuz.

a) $A(1, 1)$

b) $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

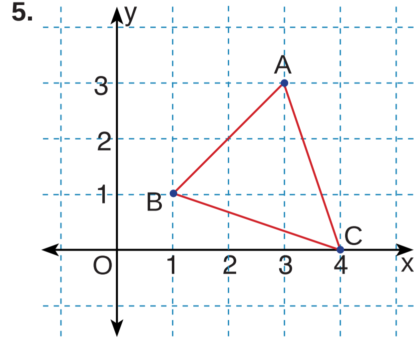
c) $C(4, 4\sqrt{3})$

ç) $D(-3, -4)$

4. $A(1, 1)$ noktasının orijin etrafında, saat yönünde α derece döndürülmesiyle $A'(-\sqrt{2}, 0)$ noktası elde ediliyor.

Buna göre α açısını bulunuz.

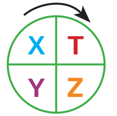
5.



Yukarıda verilen ABC üçgeninin orijin etrafında pozitif yönde 90°, 180° ve 270° döndürülmesiyle oluşan yeni üçgenleri dinamik geometri programı kullanarak aynı analitik düzlemde çiziniz.

6. $3x + 2y = 6$ **doğrusunun orijin etrafında, saatin tersi yönde $90^\circ, 180^\circ$ ve 270° döndürülmesiyle elde edilen doğruların denklemini bulunuz.**

7. Yanda verilen daire biçimindeki şekil, merkezi etrafında ve ok yönünde 630° döndürüldüğünde oluşan şeklin görünümünü bulunuz.



8. Analitik düzlemde $A(-2, 3)$ noktası x ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 2 birim öteleniyor.

Elde edilen noktanın orijin etrafında pozitif yönde $225°$ döndürülmesiyle oluşan noktayı bulunuz.

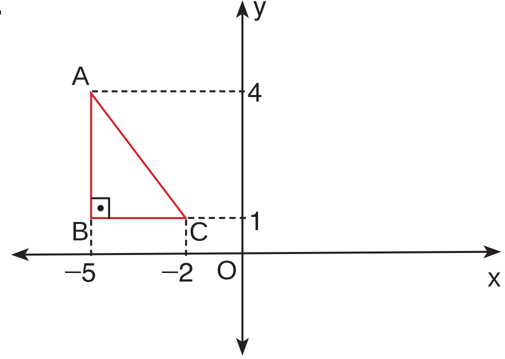
9. Analitik düzlemde $A(-3, \sqrt{3})$ noktasının orijin etrafında, pozitif yönde $840°$ döndürülmesiyle elde edilen noktanın koordinatları toplamı bulunuz.

10. Analitik düzlemde $A(-2\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$ noktası orjin etrafında, pozitif yönde $135°$ döndürüldükten sonra x ekseni boyunca negatif yönde 3 birim ve y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleniyor.

Elde edilen noktanın koordinatlarını bulunuz.

11. Analitik düzlemde $A(-6, 2\sqrt{3})$ noktasının $R_{60°}(A)$ dönme dönüşümü altındaki görüntüsü olan noktanın x ekseni boyunca negatif yönde 3 birim ötelenmesiyle oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz.

12.



Yukarıdaki analitik düzlemde verilen ABC dik üçgeninin orijin etrafında, negatif yönde $90°$ döndürülmesiyle $A'B'C'$ dik üçgeni elde ediliyor.

$A'B'C'$ dik üçgeninin x ekseni boyunca negatif yönde 1 birim ve y ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim ötelenmesi ile oluşan $A''B''C''$ dik üçgeninin koordinatlarını bulunuz ve analitik düzlemde gösteriniz.

13. Analitik düzlemde $A(3, 2)$ noktasının $B(-1, 2)$ noktası etrafında pozitif yönde $90°$ döndürülmesiyle elde edilen noktanın koordinatlarını bulunuz.

Simetri Dönüşümü

Türklerin halı ve kilim dokurken kullandıkları her motifin bir anlamı vardır. Türkler motiflerinde anılarını, duygularını, acılarını ve doğayı anlatır. Geometrik şekillerin ve temel dönüşümlerin ustalıkla kullanıldığı ve bütün dünyada hayranlıkla incelenen bu motifler yeni nesiller için çok değerli bir mirastır.

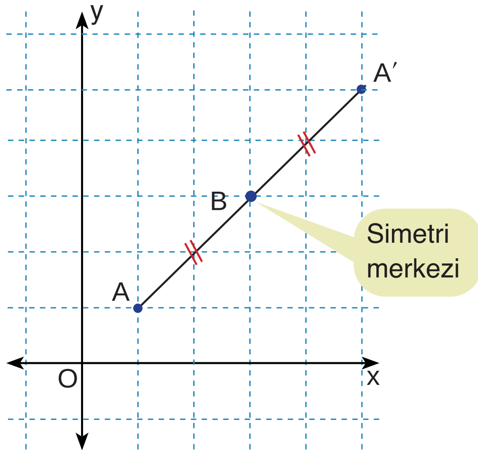


Görsel 4.4: Türk halısı

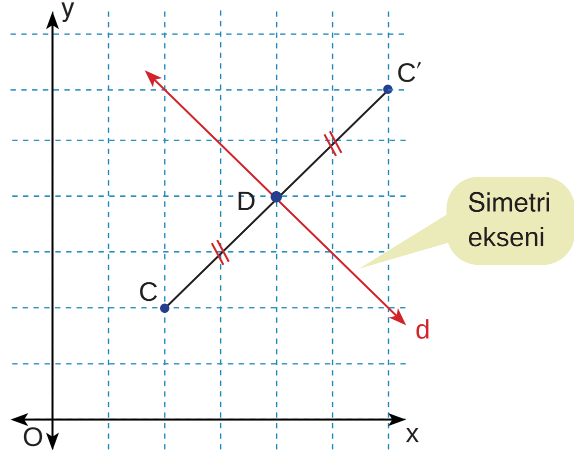
Yukarıdaki halı görseli (Görsel 4.4) incelendiğinde motiflerin eksenlere göre eşit uzaklıkta olduğu görülür. Simetri dönüşümü noktanın noktaya, noktanın doğruya, doğrunun noktaya, doğrunun doğruya göre simetriği gibi farklı biçimlerde yapılabilir.

Düzlemde P noktasının M noktasına göre simetriği P' noktası olsun. M noktasına **simetri merkezi** denir ve S_M ile gösterilir.

Eğer simetri dönüşümü bir d doğrusuna göre yapılıyor ise bu doğruya **simetri ekseni** denir ve S_d ile gösterilir.



A noktasının B noktasına göre simetriği A' noktasıdır. $|AB| = |BA'|$ olur.



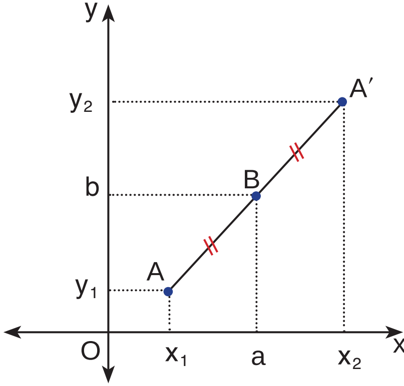
A noktasının d doğrusuna göre simetriği C' noktasıdır. $|CD| = |DC'|$ olur.

Bir Noktanın Noktaya Göre Simetriği

Hatırlatma Orta Nokta Teoremi

Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları veriliyor. $[AB]$ nın orta noktası $C(x_0, y_0)$ noktası olmak üzere $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ ve $y_0 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ olur.

Analitik düzlemde bir $A(x_1, y_1)$ noktasının $B(a, b)$ noktasına göre simetriği $A'(x_2, y_2)$ olsun.



$|AB| = |BA'|$ olduğundan B orta noktasının koordinatları $a = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ ve $b = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ olur.

$a = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow 2a = x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = 2a - x_1$

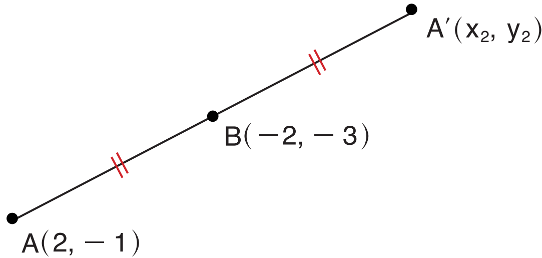
$b = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \Rightarrow 2b = y_1 + y_2 \Rightarrow y_2 = 2b - y_1$ biçiminde elde edilir.

$A(x_1, y_1)$ noktasının $B(a, b)$ noktasına göre simetriği olan $A'(x_2, y_2)$ noktasının koordinatları $A'(2a - x_1, 2b - y_1)$ biçiminde bulunur.

13. ÖRNEK

$A(2, -1)$ noktasının $B(-2, -3)$ noktasına göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM



A noktasının B noktasına göre simetriği $A'(x_2, y_2)$ noktası olsun. Orta nokta teoreminden

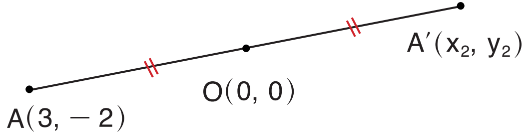
$-2 = \dfrac{2 + x_2}{2} \Rightarrow -4 = 2 + x_2 \Rightarrow x_2 = -6$ ve $-3 = \dfrac{-1 + y_2}{2} \Rightarrow -6 = -1 + y_2 \Rightarrow y_2 = -5$ olur.

A noktasının B noktasına göre simetriği $A'(-6, -5)$ bulunur.

14. ÖRNEK

A(3, − 2) noktasının orijine göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM



A noktasının orijine göre simetriği A′(x_2, y_2) noktası olsun. Orta nokta teoreminden

$0 = \dfrac{3 + x_2}{2} \Rightarrow x_2 = -3$ ve $0 = \dfrac{-2 + y_2}{2} \Rightarrow y_2 = 2$ olur.

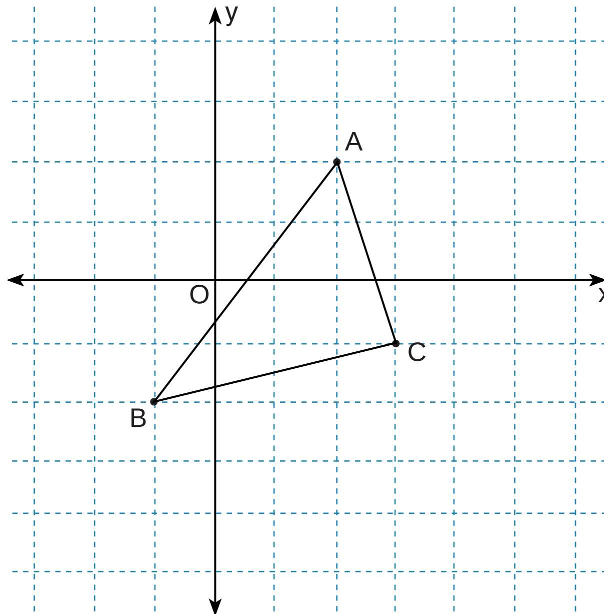
A′(−3, 2) bulunur.

Bilgi

A(x_1, y_1) noktasının orijine göre simetriği A′($-x_1$, $-y_1$) noktası olur.

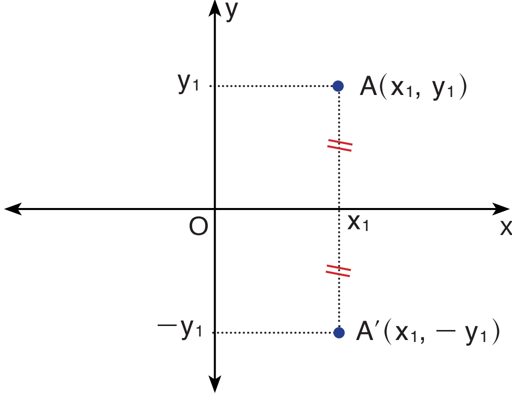
Ders İçi Uygulama 9 — Bireysel Çalışma

ABC üçgeninin orijine göre simetriğinin alınması ile oluşan A′B′C′ üçgenini aşağıdaki analitik düzlemde çizerek gösteriniz.



Bir Noktanın x Eksenine Göre Simetriği

Bir $A(x_1, y_1)$ noktasının x eksenine göre simetriği A' noktası olsun.



$A(x_1, y_1)$ noktasının x eksenine göre simetriği $\mathbf{A'(x_1, -y_1)}$ noktası olur.

15. ÖRNEK

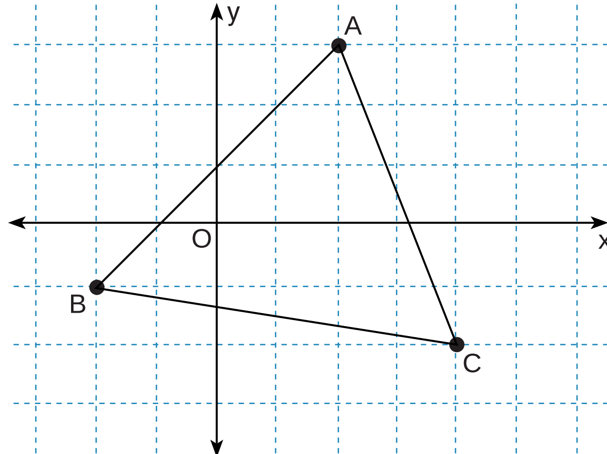
$A(-2, 3)$, $B(2, -4)$, $C(0, 2)$, $D(3, 0)$ noktalarının x eksenine göre simetriği olan noktaları bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(x_1, y_1)$ noktasının x eksenine göre simetriği $A'(x_1, -y_1)$ olduğundan
$A(-2, 3)$, $B(2, -4)$, $C(0, 2)$, $D(3, 0)$ noktalarının x eksenine göre simetriği olan noktalar, sırası ile
$A'(-2, -3)$, $B'(2, 4)$, $C'(0, -2)$, $D'(3, 0)$ olarak bulunur.

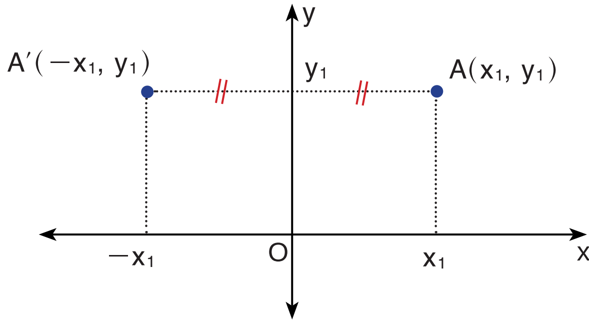
Ders İçi Uygulama 10 — **Bireysel Çalışma**

Aşağıda analitik düzlemde verilen ABC üçgeninin x eksenine göre simetriğinin alınması ile oluşan $A'B'C'$ üçgenini aşağıdaki analitik düzlemde çizerek gösteriniz.



Bir Noktanın y Eksenine Göre Simetriği

Bir $A(x_1, y_1)$ noktasının y eksenine göre simetriği A' noktası olsun.



$A(x_1, y_1)$ noktasının y eksenine göre simetriği $\mathbf{A'(-x_1, y_1)}$ noktası olur.

16. ÖRNEK

$A(2a - b, a + b)$ noktasının y eksenine göre simetriği olan nokta $A'(2b + 3, 4)$ olduğuna göre $a - b$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

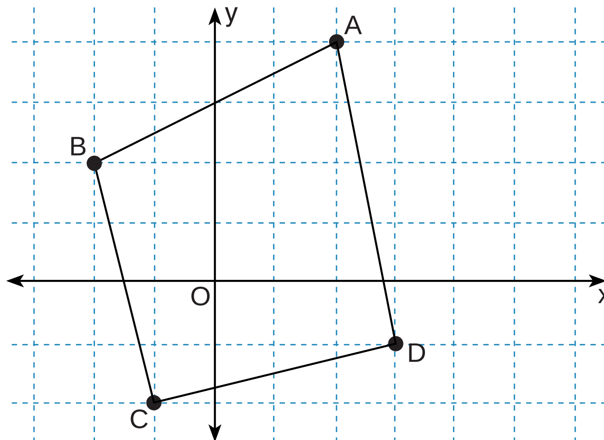
$A(2a - b, a + b)$ noktasının y eksenine göre simetriği olan nokta $A'(-2a + b, a + b)$ biçimindedir.
$(-2a + b, a + b) = (2b + 3, 4)$ olduğundan
$-2a + b = 2b + 3 \Rightarrow -2a - b = 3$ ve $a + b = 4$ olur.

$$\left.\begin{aligned} -2a - b &= 3 \\ a + b &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = -7 \text{ ve } b = 11 \text{ bulunur.}$$

$a - b = -7 - 11 = -18$ olur.

Ders İçi Uygulama 11 — Bireysel Çalışma

Aşağıda analitik düzlemde verilen ABCD dörtgeninin y eksenine göre simetriğinin alınması ile oluşan $A'B'C'D'$ dörtgenini aşağıdaki analitik düzlemde çizerek gösteriniz.



Ders İçi Uygulama 12 Teknoloji

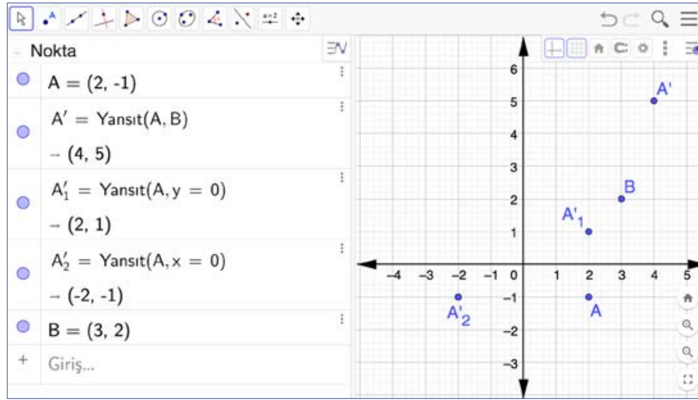
Dinamik matematik programında noktanın noktaya ve eksenlere göre simetriğini bulmak için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. Adım: Giriş kısmına ayrı ayrı **(2,-1)** ve **(3,2)** yazılarak $A=(2,-1)$ ve $B=(3,2)$ noktaları oluşturulur.

2. Adım: Giriş kısmına **Yansıt (A,B)** yazılarak A noktasının B noktasına göre simetriği olan A' noktası bulunur.

3. Adım: Giriş kısmına **Yansıt (A,y=0)** yazılarak A noktasının x eksenine göre simetriği olan A_1' noktası bulunur.

4. Adım: Giriş kısmına **Yansıt (A,x=0)** yazılarak A noktasının y eksenine göre simetriği olan A_2' noktası bulunur.



Dinamik matematik programı kullanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

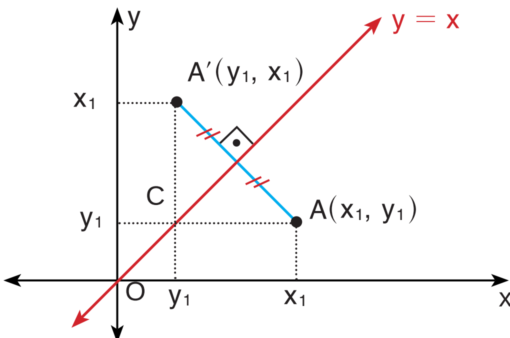
a) $(-3, 1)$ noktasının $(3, 3)$ noktasına göre simetriğini bulunuz.

b) $(9, 5)$ noktasının x eksenine göre simetriğini bulunuz.

c) $(9, -5)$ noktasının y eksenine göre simetriğini bulunuz.

Bir Noktanın $y=x$ Doğrusuna Göre Simetriği

Analitik düzlemde bir $A(x_1, y_1)$ noktasının $y=x$ doğrusuna göre simetriği A' noktası olsun.



C noktası $y=x$ doğrusu üzerinde olduğundan $C(y_1, y_1)$ olur. $A'CA$ üçgeni ikizkenar dik üçgen olduğundan $|A'C|=|AC|=x_1-y_1$ bulunur. Buradan A noktasının $y=x$ doğrusuna göre simetriği olan nokta $\mathbf{A'(y_1, x_1)}$ biçiminde elde edilir.

17. ÖRNEK

$A(a+b, a-b)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği olan nokta $A'(a-4, 3)$ olduğuna göre $a \cdot b$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(x_1, y_1)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği olan nokta $A'(y_1, x_1)$ olduğundan
$A(a+b, a-b)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği olan nokta $A'(a-b, a+b)$ olur.

$A'(a-b, a+b) = A'(a-4, 3)$

$a - b = a - 4$ ve $a + b = 3$ olur.

$a - b = a - 4 \Rightarrow b = 4$

$a + b = 3 \Rightarrow a + 4 = 3$

$a = -1$ bulunur.

$a \cdot b = -1 \cdot 4 = -4$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 13 — Bireysel Çalışma

1. ABC üçgeninin $y = x$ doğrusuna göre simetriğinin alınması ile oluşan $A'B'C'$ üçgenini aşağıdaki analitik düzlemde çizerek gösteriniz.

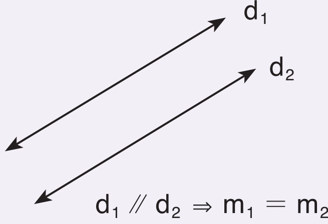
y
y = x
A
O
x
C
B

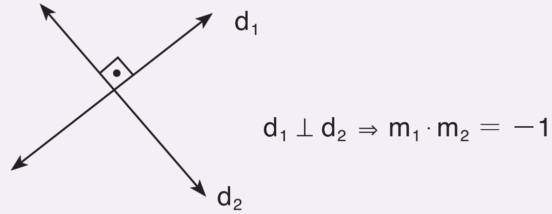
2. $A(a-b, a+b)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği olan nokta $A'(2, a+1)$ olduğuna göre $\frac{a+b}{a \cdot b}$ değeri kaçtır?

Bir Noktanın Herhangi Bir Doğruya Göre Simetriği

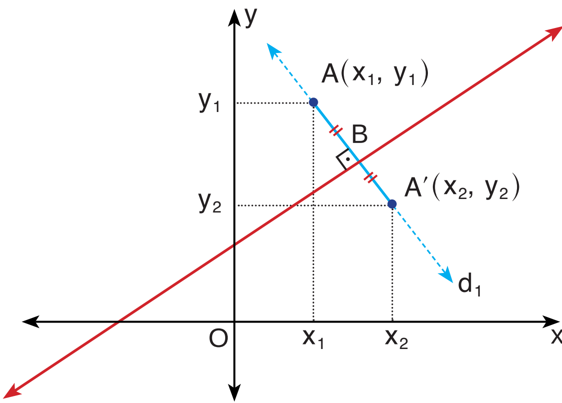
Hatırlatma İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları ve Doğru Denklemi

- $y = mx + n$ biçiminde verilen doğrunun eğimi m dir. d_1 doğrusunun eğimi m_1 ve d_2 doğrusunun eğimi m_2 olmak üzere d_1 doğrusu d_2 doğrusuna paralel ise $m_1 = m_2$ olur. d_1 doğrusu d_2 doğrusuna dik ise $m_1 \cdot m_2 = -1$ olur.





- $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen ve eğimi m olan doğru denklemi $y - y_1 = m(x - x_1)$ olur.



Düzlemde herhangi bir $A(x_1, y_1)$ noktası ve eğimi m_1 olan d doğrusu alınsın. A noktasının d doğrusuna göre simetriği A' noktası olmak üzere AA' doğrusu d doğrusuna diktir.

AA' doğrusunun eğimi m_2 alınırsa birbirine dik olan doğruların eğimleri çarpımı -1 olacağından $m_1 \cdot m_2 = -1$ olur.

A noktasının simetriği olan A' noktası aşağıdaki işlem basamakları takip edilerek bulunur.

I. A noktasından geçen ve d doğrusuna dik olan d_1 doğrusunun denklemi $y - y_1 = m_2(x - x_1)$ bağıntısı ile elde edilir.

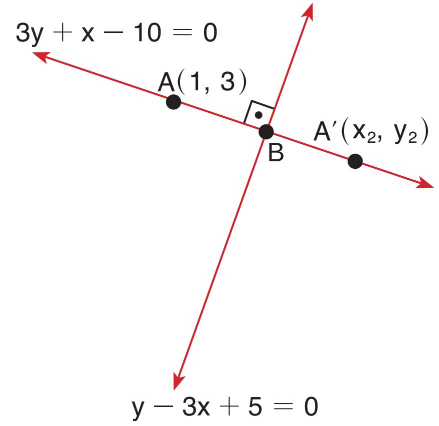
II. d ve d_1 doğrularının ortak çözümü yapılarak bu doğruların kesişim noktası olan B noktası bulunur.

III. A noktasının B noktasına göre simetriği olan A' noktası elde edilir.

18. ÖRNEK

$A(1, 3)$ noktasının $y = 3x - 5$ doğrusuna göre simetriği olan $A'(x_2, y_2)$ noktasını bulunuz.

ÇÖZÜM



$y = 3x - 5$ doğrusunun eğimi $m_1 = 3$ tür. A noktasından geçen ve bu doğruya dik olan doğrunun eğimi m_2 olmak üzere

$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow 3 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = \frac{-1}{3}$ bulunur.

A noktası ve m_2 değerleri $y - y_1 = m(x - x_1)$ doğru denkleminde yerine yazılırsa

$$y - 3 = \left(-\frac{1}{3}\right)(x - 1)$$
$$3y - 9 = -x + 1$$
$$3y + x - 10 = 0$$

doğrusu elde edilir.

$y - 3x + 5 = 0$ ve $3y + x - 10 = 0$ doğrularının ortak çözümü yapılarak B noktası

$$\left.\begin{matrix} y - 3x + 5 = 0 \\ 3y + x - 10 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ ve } y = \frac{5}{2} \Rightarrow B\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \text{ bulunur.}$$

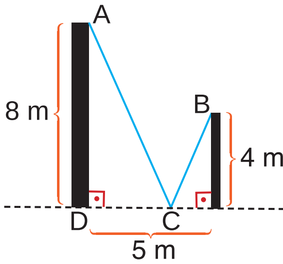
$A(1, 3)$ noktasının $B\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ noktasına göre simetriği $A'(x_2, y_2)$ olmak üzere orta nokta teoreminden

$$\frac{5}{2} = \frac{1 + x_2}{2} \Rightarrow x_2 = 4$$

$$\frac{5}{2} = \frac{3 + y_2}{2} \Rightarrow y_2 = 2 \text{ olur.}$$

$A(1, 3)$ noktasının $y = 3x - 5$ doğrusuna göre simetriği olan nokta $A'(4, 2)$ bulunur.

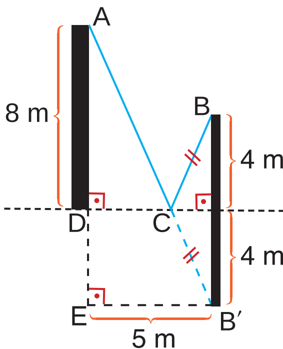
19. ÖRNEK



Yandaki şekilde zemine dik olarak verilen direkler üzerindeki A ve B noktalarından C noktasına bir tel bağlanmıştır. Direkler arasındaki mesafe 5 metredir.

Bu bağlama işleminde en az miktarda tel kullanmak için $|AC| + |BC|$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



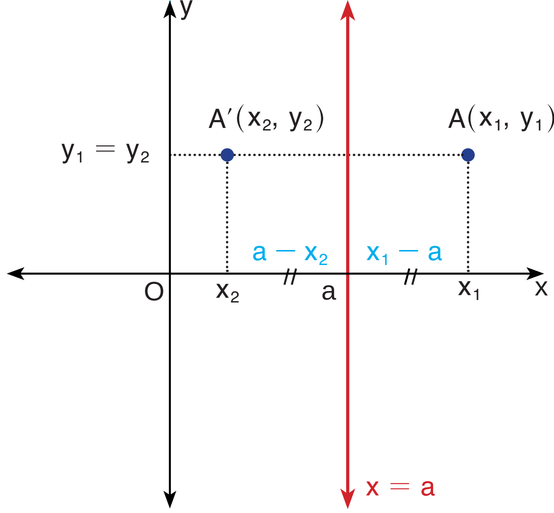
En az tel kullanmak için B noktasının DC doğrusuna göre simetriği alınırsa A, C ve B′ noktaları doğrusal olmalıdır.

$|AE| = 12$ m, $|EB'| = 5$ m ve Pisagor teoreminden $|AB'| = 13$ m bulunur.

$|AC| + |BC| = |AC| + |B'C| = 13$ m olur.

Ders İçi Uygulama 14 Bireysel Çalışma

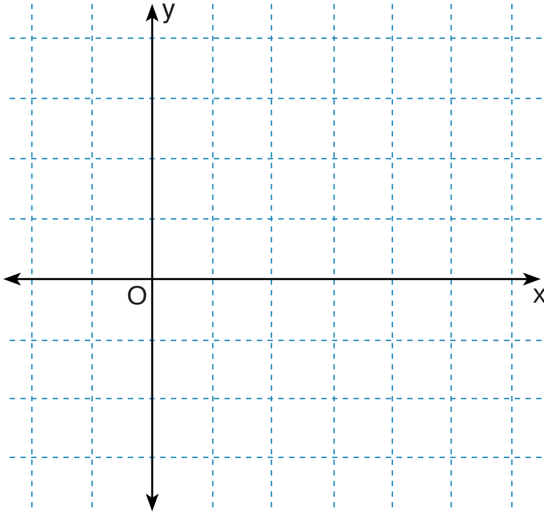
Bir $A(x_1, y_1)$ noktasının $x = a$ doğrusuna göre simetriği A' noktası olsun.



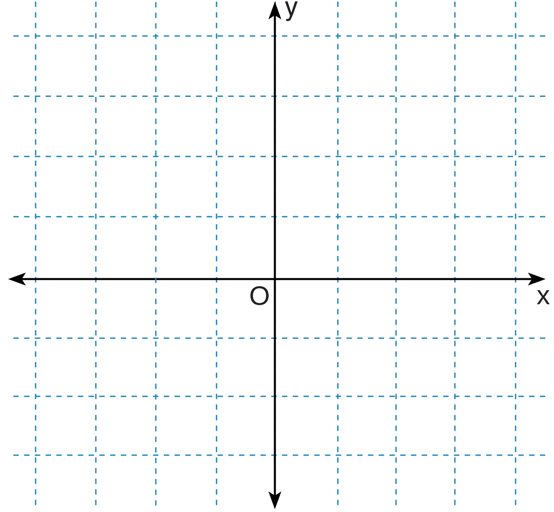
$a - x_2 = x_1 - a$ olduğundan $x_2 = 2a - x_1$ bulunur. $\mathbf{A'(2a - x_1, y_1)}$ elde edilir.

Buna göre

a) $A(-2, 3)$ noktasının $x = 2$ doğrusuna göre simetriğini bularak analitik düzlem üzerinde gösteriniz.

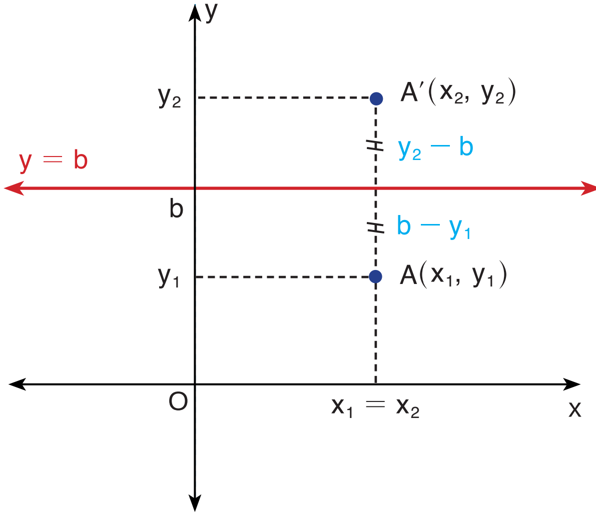


b) $A(1, -2)$ noktasının $x = -1$ doğrusuna göre simetriğini bularak analitik düzlem üzerinde gösteriniz.



Ders İçi Uygulama 15 — Bireysel Çalışma

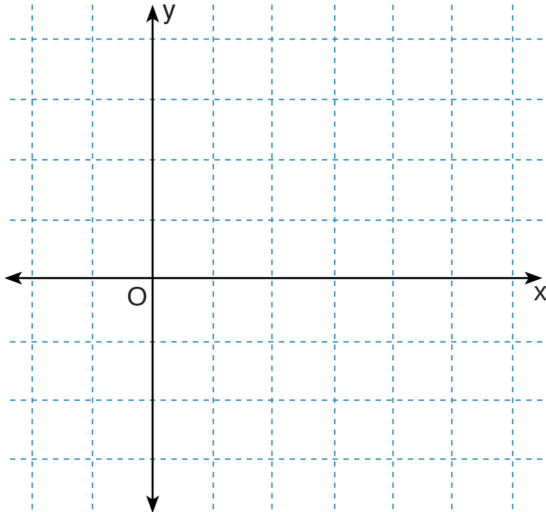
Bir $A(x_1, y_1)$ noktasının $y = b$ doğrusuna göre simetriği A' noktası olsun.



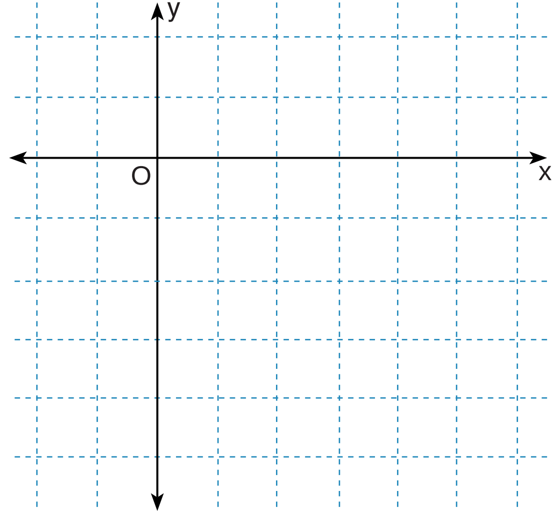
$y_2 - b = b - y_1$ olduğundan $y_2 = 2b - y_1$ bulunur. Buradan $\mathbf{A'(x_1, 2b - y_1)}$ elde edilir.

Buna göre

a) $A(-1, 3)$ noktasının $y = 2$ doğrusuna göre simetriğini bularak analitik düzlem üzerinde gösteriniz.



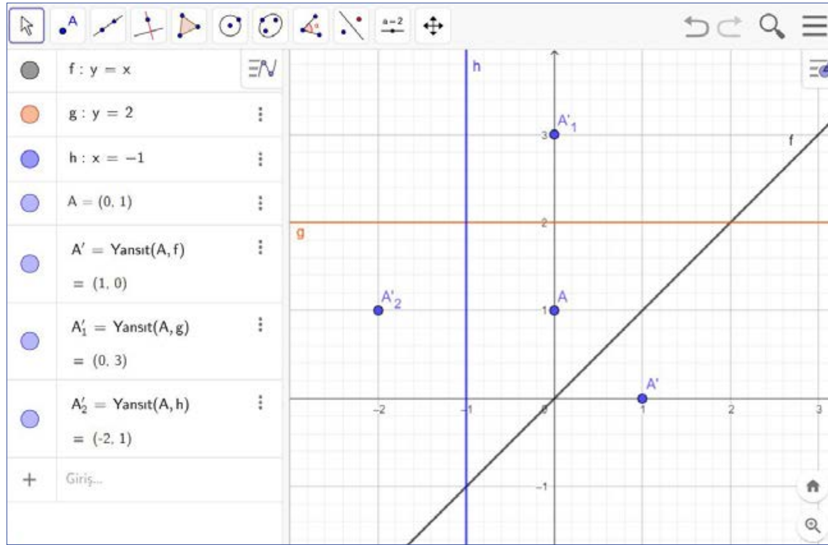
b) $A(3, 2)$ noktasının $y = -2$ doğrusuna göre simetriğini bularak analitik düzlem üzerinde gösteriniz.



Ders İçi Uygulama 16 — Teknoloji

Dinamik matematik programında noktanın herhangi bir doğruya göre simetriğini bulmak için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. Adım: Giriş kısmına ayrı ayrı **f:y=x**, **g:y=2 ve h:x=-1** yazılarak f, g ve h doğruları oluşturulur.
2. Adım: Giriş kısmına **(0,1)** yazılarak A noktası oluşturulur.
3. Adım: Giriş kısmına **Yansıt (A,f)** yazılarak A noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği olan A' noktası bulunur.
4. Adım: Giriş kısmına **Yansıt (A,g)** yazılarak A noktasının $y = 2$ doğrusuna göre simetriği olan A_1' noktası bulunur.
5. Adım: Giriş kısmına **Yansıt (A,h)** yazılarak A noktasının $x = -1$ doğrusuna göre simetriği olan A_2' noktası bulunur.



Dinamik matematik programı kullanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

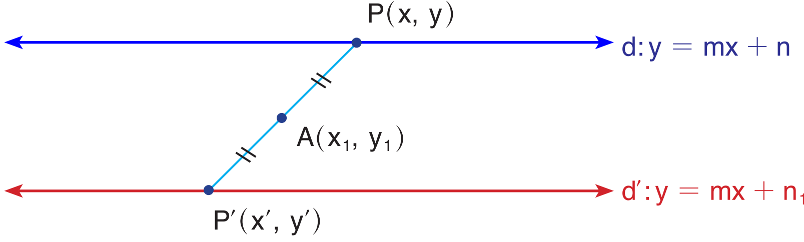
a) $(1, 1)$ noktasının $x = 2$ doğrusuna göre simetriğini bulunuz.

b) $(1, -3)$ noktasının $y = -1$ doğrusuna göre simetriğini bulunuz.

c) $(-3, 1)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriğini bulunuz.

ç) $(1, 2)$ noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriğini bulunuz.

Bir Doğrunun Herhangi Bir Noktaya Göre Simetriği



d doğrusu üzerinde alınan herhangi $P(x, y)$ noktasının $A(x_1, y_1)$ noktasına göre simetriği olan nokta $P'(x', y')$ olsun. $P(x, y)$ noktasının A noktasına göre simetriği olan nokta, d doğrusuna paralel olan d' doğrusu üzerinde olacaktır.

Orta nokta teoreminden

$$x_1 = \frac{x + x'}{2} \Rightarrow 2x_1 = x + x' \Rightarrow x' = 2x_1 - x$$

$$y_1 = \frac{y + y'}{2} \Rightarrow 2y_1 = y + y' \Rightarrow y' = 2y_1 - y \text{ bulunur.}$$

$P'(x', y')$ noktası $\mathbf{P'(2x_1 - x, 2y_1 - y)}$ elde edilir. Bu doğrunun denklemi $d': y = mx + n_1$ olur.

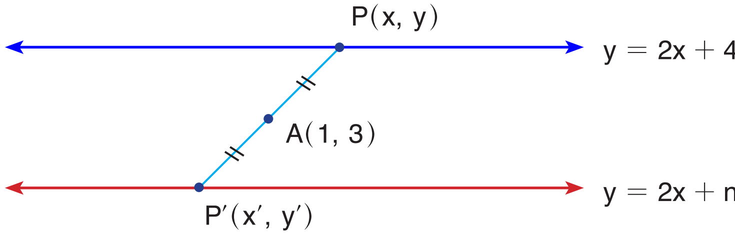
Bilgi

$y = mx + n$ doğrusunun $A(x_1, y_1)$ noktasına göre simetriğini bulmak için $y = mx + n$ doğrusunda x yerine $2x_1 - x$ ve y yerine $2y_1 - y$ yazılır.

20. ÖRNEK

$y = 2x + 4$ doğrusunun $A(1, 3)$ noktasına göre simetriği olan doğrunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM



Orta nokta teoreminden

$$1 = \frac{x + x'}{2} \Rightarrow 2 = x + x' \Rightarrow x' = 2 - x$$

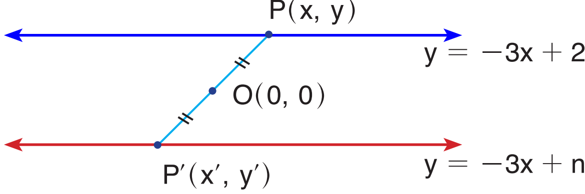
$$3 = \frac{y + y'}{2} \Rightarrow 6 = y + y' \Rightarrow y' = 6 - y \text{ bulunur.}$$

$y = 2x + 4$ doğrusunda x yerine $2 - x$ ve y yerine $6 - y$ yazılırsa
$6 - y = 2(2 - x) + 4 \Rightarrow 6 - y = 8 - 2x \Rightarrow y = 2x - 2$ bulunur.

21. ÖRNEK

$y = -3x + 2$ doğrusunun orijine göre simetriği olan doğrunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM



$0 = \frac{x + x'}{2} \Rightarrow 0 = x + x' \Rightarrow x' = -x$

$0 = \frac{y + y'}{2} \Rightarrow 0 = y + y' \Rightarrow y' = -y$ bulunur.

$y = -3x + 2$ doğrusunda x yerine $-x$ ve y yerine $-y$ yazılırsa $-y = -3(-x) + 2 \Rightarrow y = -3x - 2$ bulunur.

Bilgi

$y = mx + n$ doğrusunun orijine göre simetriğini bulmak için doğru denkleminde x yerine $-x$, y yerine $-y$ yazılır.

Ders İçi Uygulama 17

Bireysel Çalışma

Aşağıdaki tablolarda verilen ifadelerin simetri dönüşümleri altındaki görüntülerini bulunuz.

Nokta	Simetri Dönüşümü			
	$(3, -1)$ Noktasına Göre	x Eksenine Göre	y Eksenine Göre	Orijine Göre
$(-4, -2)$				
$(2, -1)$				

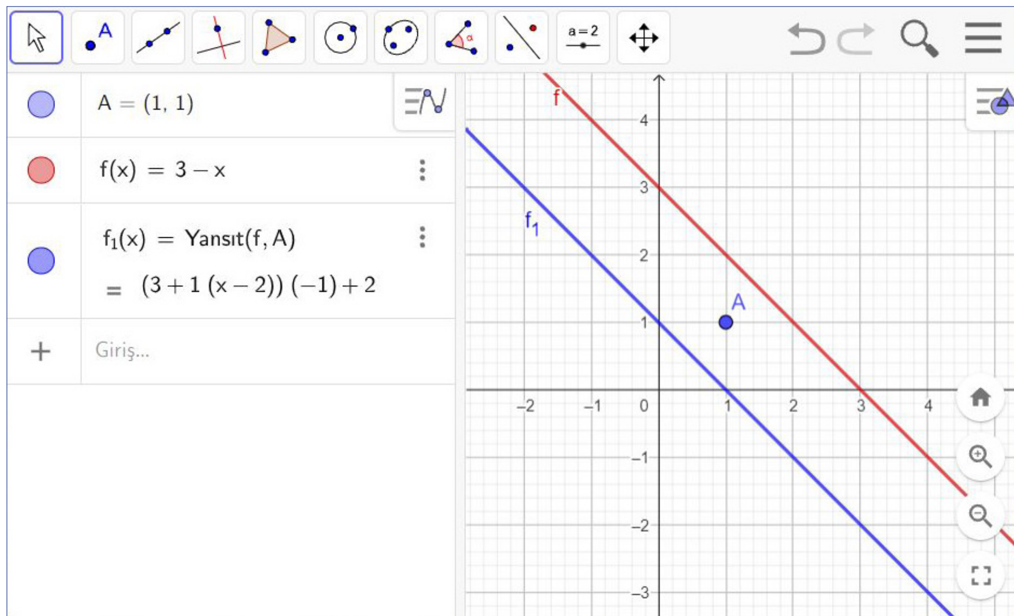
Nokta	Simetri Dönüşümü				
	$y = x$ Doğrusuna Göre	$y = -x$ Doğrusuna Göre	$x = 3$ Doğrusuna Göre	$y = -2$ Doğrusuna Göre	$x + y + 2 = 0$ Doğrusuna Göre
$(3, -4)$					
$(0, 3)$					

Doğru	Simetri Dönüşümü	
	Orijine Göre	$(2, -1)$ Noktasına Göre
$3x + 2y + 3 = 0$		

Ders İçi Uygulama 18 — Teknoloji

Dinamik matematik programı kullanarak herhangi bir doğrunun herhangi bir noktaya göre simetriğini bulmak için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. Adım: Giriş kısmına **(1,1)** yazılarak A noktası oluşturulur.
2. Adım: Giriş kısmına **3-x** yazılarak $f(x) = 3 - x$ doğrusunun grafiği çizilir.
3. Adım: Giriş kısmına **Yansıt (f,A)** yazılarak $f(x) = 3 - x$ doğrusunun A noktasına göre simetriği olan $f_1(x)$ doğrusunun grafiği bulunur.



Dinamik matematik programı kullanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) $y = 3x - 1$ doğrusunun $A(-1, 2)$ noktasına göre simetriğini bulunuz.

b) $y = x - 1$ doğrusunun $B(4, 3)$ noktasına göre simetriğinin kendisi olduğunu gösteriniz.

ALIŞTIRMALAR 4.3

1. $(-1, 2)$ **noktasının** $(1, -1)$ **noktasına göre simetriğini bulunuz.**

2. $(3, -4)$ **noktasının x ve y eksenlerine göre simetriğini bulunuz.**

3. $(3, 4)$ **noktasının orijine göre simetriğini bulunuz.**

4. $(-3, 4)$ **noktasının** $y = x$ **doğrusuna göre simetriğini bulunuz.**

5. $(2, 4)$ **noktasının** $x = 5$ **ve** $y = -2$ **doğrularına göre simetriğini bulunuz.**

6. $(2, -1)$ **noktasının** $3y - 2x = 6$ **doğrusuna göre simetriğini bulunuz.**

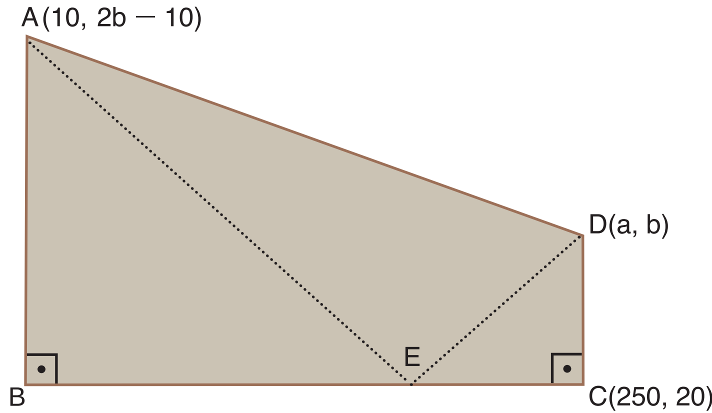
7. $A(-7, -2)$ **noktasının** $4x + 3y = 12$ **doğrusuna göre simetriği** A' **noktası olduğuna göre** $|AA'|$ **nu bulunuz.**

8. $A(4, 7)$ **noktasının d doğrusuna göre simetriği** $A'(6,3)$ **noktası olduğuna göre d doğrusunun denklemini bulunuz.**

9. $y = 2x - 4$ **doğrusunun** $(6, -2)$ **noktasına göre simetriği olan doğrunun denklemini bulunuz.**

10. $(6, -2)$ **noktasının** $ax - 1 = 3by$ **doğrusuna göre simetriği kendisi olduğuna göre** $a + b$ **değerini bulunuz.**

11. Aşağıda bir çiftçinin dik yamuk şeklindeki düzlemsel tarlasının sınırlandırıldığı bölgenin temsilî çizimi ve köşe noktalarının koordinatları metre cinsinden modellenmiştir.



BC kenarına uğramak şartıyla çiftçinin tarlasının A noktasından D noktasına en kısa mesafesi 260 metre ise bu tarlanın kaç dönüm olduğunu bulunuz.
(1 dönüm $= 1\,000\ m^2$)

Temel Dönüşümlerin Bileşkesi

Bilgi

Birden fazla öteleme, dönme veya simetri dönüşümü uygulanarak elde edilen dönüşüme **bileşke dönüşümü** denir.

Bileşke dönüşümü aynı dönüşümün art arda uygulanması şeklinde oluşturulabileceği gibi farklı dönüşümlerin art arda uygulanması biçiminde de oluşturulabilir. Öteleme dönüşümünün art arda uygulanması ile bileşkesi elde edilir. Bu durumda öteleme dönüşümünün bileşkesi dönüşümlerin toplamı olacaktır.

22. ÖRNEK

$A(-1, 2)$ noktası x ekseni doğrultusunda, negatif yönde 2 birim; y ekseni doğrultusunda, pozitif yönde 3 birim ötelendikten sonra tekrar x ekseni doğrultusunda, pozitif yönde 5 birim; y ekseni doğrultusunda, pozitif yönde 4 birim ötelenmektedir. A noktasının bu iki dönüşümden sonraki koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

A noktasına uygulanan öteleme dönüşümlerinin toplamı bileşke dönüşümü olur. Buradan A noktasının bu iki dönüşümden sonraki koordinatları
$A'(x_2, y_2) = (-1, 2) + (-2, 3) + (5, 4) = (-1 - 2 + 5, 2 + 3 + 4) = (2, 9)$ elde edilir.

Bilgi

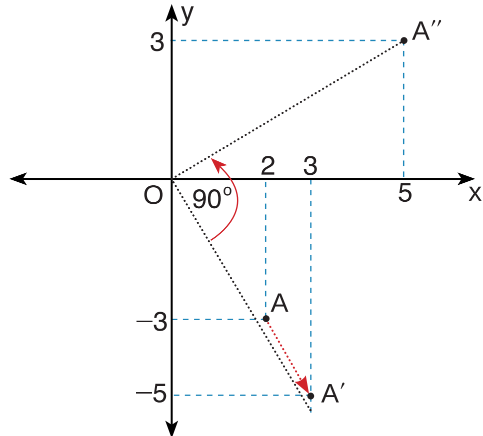
Öteleme dönüşümü ve dönme dönüşümünün birlikte uygulanması ile **ötelemeli dönme dönüşümü** elde edilir. Bu durumda dönüşümün bileşkesi bulunurken öteleme ve dönme dönüşümleri verilen sırayla uygulanır.

23. ÖRNEK

$A(2, -3)$ noktası x ekseni doğrultusunda, pozitif yönde 1 birim; y ekseni doğrultusunda, negatif yönde 2 birim ötelendikten sonra orijin etrafında, pozitif yönde 90° döndürülüyor. Elde edilen noktanın koordinatlarını bulup analitik düzlemde gösteriniz.

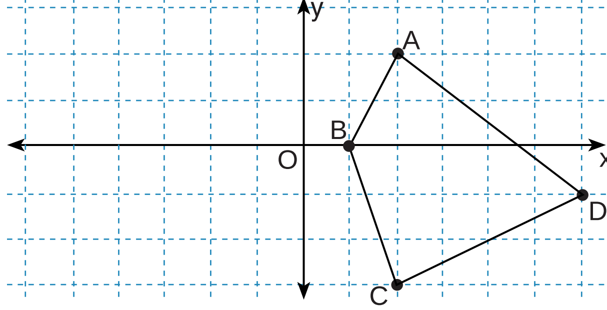
ÇÖZÜM

$A(2, -3)$ noktası x ekseni doğrultusunda, pozitif yönde 1 birim; y ekseni doğrultusunda, negatif yönde 2 birim ötelendikten sonra
$A'(x, y) = (2, -3) + (1, -2) = (3, -5)$ olur.
$A'(3, -5)$ noktası orijin etrafında, pozitif yönde 90° döndürülürse $R_{90^\circ}(x, y) = (-y, x) = A''$ olduğundan $R_{90^\circ}(3, -5) = (5, 3) = A''$ bulunur.



Ders İçi Uygulama 19 — Bireysel Çalışma

ABCD dörtgeninin x ekseni doğrultusunda, negatif yönde 4 birim; y ekseni doğrultusunda, pozitif yönde 2 birim ötelenmesinden sonra orijin etrafında, pozitif yönde 180° döndürülmesi ile oluşan dörtgeni aşağıdaki analitik düzlemde çizerek gösteriniz.



Bilgi

Öteleme dönüşümü ve simetri dönüşümünün birlikte uygulanması ile **ötelemeli simetri dönüşümü** elde edilir. Bu durumda dönüşümün bileşkesi bulunurken öteleme ve simetri dönüşümleri sırayla uygulanır.

24. ÖRNEK

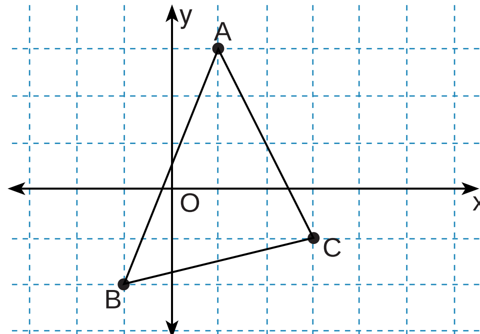
$A(1, -1)$ noktası x ekseni doğrultusunda, negatif yönde 2 birim; y ekseni doğrultusunda, negatif yönde 3 birim ötelenerek A' noktası elde ediliyor. Daha sonra A' noktasının y eksenine göre simetriği alınarak A'' noktası elde ediliyor.
Buna göre A'' noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(1, -1)$ noktası x ekseni doğrultusunda, negatif yönde 2 birim; y ekseni doğrultusunda, negatif yönde 3 birim ötelendikten sonra $A'(x, y) = (1, -1) + (-2, -3) = (-1, -4)$ noktası bulunur.
$A'(-1, -4)$ noktasının y eksenine göre simetriği alınarak $A''(1, -4)$ elde edilir.

Ders İçi Uygulama 20 — Bireysel Çalışma

ABC üçgeninin x ekseni doğrultusunda, pozitif yönde 1 birim; y ekseni doğrultusunda, pozitif yönde 2 birim ötelenmesinin ardından x eksenine göre simetriğinin alınması ile oluşan $A'B'C'$ üçgenini aşağıdaki analitik düzlemde çizerek gösteriniz.

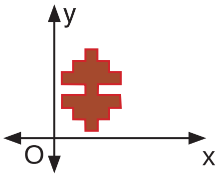


Temel Dönüşümler ve Bu Dönüşümlerin Bileşkesini İçeren Uygulamalar


Görsel 4.5: Selimiye Camii kubbesi

Temel dönüşümler ve bu dönüşümlerin bileşkesini içeren örnekler mimaride, sanatta ve doğada görülmektedir. Yanda verilen görseldeki (Görsel 4.5) Mimar Sinan tarafından yapılmış, Edirne'de bulunan Selimiye Camii'nin kubbesi Türk mimarisinde temel dönüşümlerin en güzel örneklerindendir. Kubbede öteleme, dönme ve simetri dönüşümleri kullanılmıştır.

25. ÖRNEK

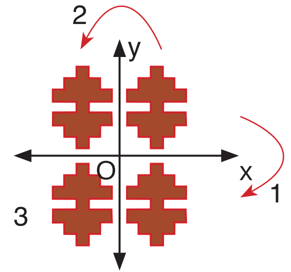


Bukağı, Anadolu kilimlerinde kullanılan bir motif olup aile birliğine ve birlikte olma umuduna işaret eder.

Yanda verilen bukağı deseninin x eksenine ve y eksenine göre simetri dönüşümünü; pozitif yönde, orijin etrafında 180° döndürülmesi sıralamasına göre oluşturulan dönüşümün görüntüsünü bulunuz.

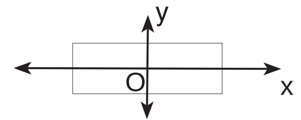
ÇÖZÜM

Verilen desenin x ve y eksenine göre simetri dönüşümü; pozitif yönde, orijin etrafında 180° döndürülmesi sıralamasına göre oluşturulan dönüşümün görüntüsü yandaki gibi oluşur.

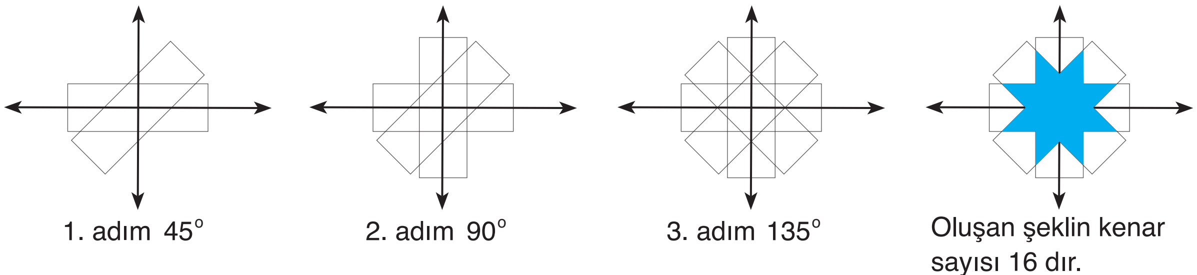


26. ÖRNEK

Yandaki dikdörtgen aynı analitik düzlemde, orijin etrafında, pozitif yönde 45°, 90° ve 135° şeklinde 3 defa döndürülüyor. Uygulanan 3 dönüşüm sırasında oluşan şekillerin ortak alanı boyanıyor. Boyanarak oluşturulan şeklin kenar sayısını bulunuz.



ÇÖZÜM



Ders İçi Uygulama 21 — Bireysel Çalışma

Aşağıdaki görsellerde öteleme, dönme ve simetri dönüşümlerine çeşitli örnekler verilmiştir. Bu görsellerde hangi dönüşümlerin kullanıldığını belirleyiniz.



Uğur böceği



Çini örneği, Konya Mevlânâ Müzesi



Escher'ın (Eşır) Kuşlar ve Balıklar tablosu
Escher Sarayı Müzesi, Den Haag, Hollanda



Anadolu kilimi modeli

Ders İçi Uygulama 22 — Teknoloji

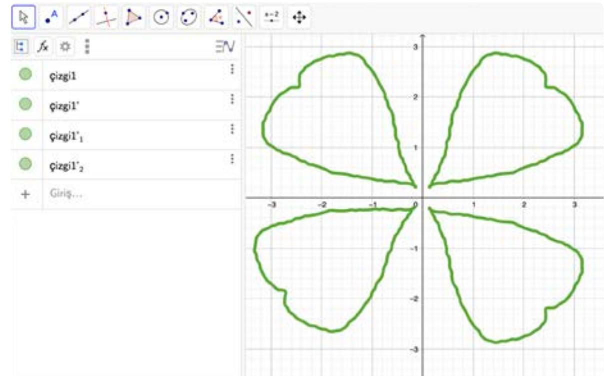
Dinamik matematik programı kullanarak temel dönüşümlerin bileşkesine ait uygulama yapmak için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. Adım: Kalem aracı seçildikten sonra 1. bölgeye herhangi bir desen çizilerek çizgi1 nesnesi oluşturulur.

2. Adım: Giriş kısmına **Yansıt(çizgi1,x=0)** yazılarak çizgi1 nesnesinin y eksenine göre simetriği bulunur.

3. Adım: Giriş kısmına **Döndür(çizgi1,180^0)** yazılarak çizgi1 nesnesi orijin etrafında, pozitif yönde 180° döndürülür.

4. Adım: Giriş kısmına **Yansıt(çizgi1,y=0)** yazılarak çizgi1 nesnesinin x eksenine göre simetriği bulunur.



Dinamik matematik programı kullanarak düzgün çokgen aracını seçtikten sonra oluşturacağınız ardışık iki köşesi (0, 1) ve (1, 0) noktalarında bulunan düzgün beşgene (S_x, $R_{180°}$, S_y) dönüşümlerini uygulayınız. Dönüşümlerin sıralamasında yapılacak değişikliğin en sonda oluşacak deseni etkileyip etkilemeyeceğini inceleyiniz.

Ders İçi Uygulama 23 — Grup Çalışması

Etkinliğin Adı	Öteleme, Dönme ve Simetri dönüşümleri	
Etkinliğin Amacı	Temel dönüşümleri kullanarak model oluşturabilme.	
Önerilen Süre	15 dk.	
Materyaller	Kâğıt, kalem, açıölçer, selobant, makas.	
Yönerge	• Kâğıda 10 cm uzunluğunda bir BC doğru parçası çiziniz. • Açıölçer kullanarak ABC eşkenar üçgenini oluşturup makasla kesiniz. Üçgenin AD yüksekliğini çiziniz. • AD kenarının orta noktasından tabana paralel EF doğru parçasını çizip EF doğru parçasının orta noktasını L noktası olarak adlandırınız. AF doğru parçasına paralel KL doğru parçasını çiziniz. • Makasla AKLF dörtgenini kesip bant ile dörtgenin A köşesinden yapıştırınız. Oluşan şekli istediğiniz bir renge boyayınız. • Sınıfta oluşturulan bütün üçgenleri öğretmen masası üzerinde birleştiriniz.	
Sonuç, Değerlendirme	Oluşan modelin dönme dönüşümü ile oluştuğunu ve her bir altıgenin öteleme dönüşümü ile tekrar ettiğini inceleyiniz. Sizce üçgen yerine farklı geometrik şekillerle farklı modeller oluşturulabilir mi? Tartışınız.	

1. Analitik düzlemde bir A noktası, 3 birim sağa ve 4 birim yukarı ötelenerek A' noktası elde ediliyor. A' noktası da 9 birim sağa ve 1 birim yukarı ötelenerek A'' noktası elde ediliyor.

Buna göre $|AA''|$ nun kaç birim olduğunu bulunuz.

2. $A(-1,-2)$ noktası orijin etrafında, negatif yönde $\left(\frac{3\pi}{7}-x\right)$ radyan döndürülerek A' noktası elde ediliyor. A noktası orijin etrafında pozitif yönde $\left(x+\frac{\pi}{14}\right)$ radyan döndürülerek A'' noktası elde ediliyor.

A' ve A'' noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

3. $A(-3,-2)$ **noktasının $y=x$ doğrusuna göre simetriği B noktası, B noktasının y eksenine göre simetriği C noktası, C noktasının $y+x=0$ doğrusuna göre simetriği D noktası, D noktasının x eksenine göre simetriği E noktası, E noktasının $y=x$ doğrusuna göre simetriği F noktası, F noktasının y eksenine göre simetriği G noktası, G noktasının $y+x=0$ doğrusuna göre simetriği H noktası olduğuna göre ABCDEFGH çokgeninin çevresinin uzunluğunu ve alanını bulunuz.**

4. $A(-2,-3)$ **noktasının $y=3-2x$ doğrusuna göre simetriği olan noktayı bulunuz.**

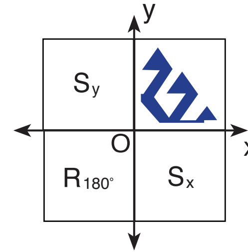
5. $[AB]$ nın uç noktalarının koordinatları $A(1,1)$ ve $B(4,3)$ noktalarıdır. $[AB]$ orijin etrafında önce pozitif yönde $90°$ döndürülerek $[A'B']$ ve sonra orijine göre simetriği alınarak $[A''B'']$ elde ediliyor. Daha sonra bu doğru parçalarının uç noktalarından A' ile A'' ve B' ile B'' birleştirilerek $A'B'B''A''$ dörtgeni elde ediliyor.

Buna göre oluşan $A'B'B''A''$ dörtgeninin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

6. $A(-1,-1)$ noktasının $y=2x+1$ ve $y=-2x-3$ doğrularına göre simetriği A' noktasıdır.

Buna göre $|AA'|$ nu bulunuz.

7.



S_x x eksenine göre simetri dönüşümü, S_y y eksenine göre simetri dönüşümü, $R_{180°}$ orijin etrafında, pozitif yönde $180°$ dönme dönüşümü olmak üzere yukarıdaki eş karelerin içerisinde bir desen ve desene uygulanması gereken dönüşümler verilmiştir.

Şekil tamamlandığında oluşan görüntüyü bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 4

1-5. sorularda boş bırakılan yerleri uygun biçimde doldurunuz.

1. $A(-3, 6)$ noktası x ekseni boyunca pozitif yönde 5 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 4 birim ötelendiğinde .... noktası elde edilir.

2. $B(-1, \sqrt{3})$ noktasının orijin etrafında, pozitif yönde 90^o ve negatif yönde 60^o döndürülmesi ile oluşan noktalarının koordinatları sırasıyla .... ve ....olur.

3. $C(1, -2)$ noktasının $P(-2, 2)$ noktasına göre simetriği .... noktası olur.

4. $D(4, -3)$ noktasının $x - y + 6 = 0$ doğrusuna göre simetriği .... noktası olur.

5. $E(-4, 7)$ noktasının y ekseni boyunca negatif yönde 4 birim ötelenmesi ile oluşan noktanın orijin etrafında, pozitif yönde 270° döndürülmesi ile .... noktası elde edilir.

6-8. sorularda verilen tablolardaki boşlukları uygun şekilde doldurunuz.

6. Aşağıda verilen noktaların orijin etrafında belirtilen yön ve açılarla döndürülmesiyle elde edilen noktaların koordinatlarını tabloya yerleştiriniz.

	Saatin Tersi Yönünde (Pozitif)			**Saat Yönünde (Negatif)**		
	90°	180°	270°	90°	180°	270°
$(5, -3)$						
$\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$						
$(2, 0)$						

7. Aşağıda verilen noktaların simetri dönüşümü altındaki görüntülerini tabloya yerleştiriniz.

Simetriği / **Nokta**	$(-1, 3)$ Noktasına Göre	Orijine Göre	x Eksenine Göre	y Eksenine Göre	$x = 3$ Doğrusuna Göre	$y = -2$ Doğrusuna Göre	$y = x$ Doğrusuna Göre	$y = -2x$ Doğrusuna Göre	$y = 3x - 6$ Doğrusuna Göre
$(2, 1)$									
$(-3, 0)$									
$(-4, 1)$									
$(0, -2)$									

8. $x + y - 3 = 0$ **doğrusunun aşağıda verilen açılarla orijin etrafında dönme dönüşümü altındaki görüntülerini karşılarındaki boşluklara yazıp eş olan dönüşümleri eşleştiriniz.**

	R_α	Doğru Denklemi
I.	$90°$	
II.	$180°$	
III.	$270°$	

	R_α	Doğru Denklemi
a)	$-90°$	
b)	$-180°$	
c)	$-270°$	

9-21. çoktan seçmeli soruları cevaplayınız.

9. m ve n birer pozitif tam sayı olmak üzere analitik düzlemde $A(-3, 2)$ noktasının m birim sağa ve n birim aşağı ötelenmesiyle $A'(2, -8)$ noktası elde ediliyor.

Buna göre $m \cdot n$ **kaçtır?**

A) -50 B) -10 C) 10 D) 20 E) 50

10. Analitik düzlemde $B(b^2, 2b)$ **noktasının 3b birim sola ve 6 birim yukarı ötelenmesiyle elde edilen noktanın koordinatları eşit ise b nin alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11. Denklemi $y - 2x + c = 0$ olan d_1 doğrusu 1 birim sola ve 2 birim yukarı ötelendiğinde d_2 doğrusu elde ediliyor.

d_2 **doğrusu** $A(c, 1)$ **noktasından geçtiğine göre c kaçtır?**

A) -4 B) -3 C) 3 D) 4 E) 5

12. Analitik düzlemde $A(4, 3)$ noktasının orijin etrafında, pozitif yönde $90°$ ve $180°$ döndürülmesiyle elde edilen noktalar sırasıyla B ve C noktalarıdır.

Buna göre $A(\widehat{ABC})$ **kaçtır?**

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

13. Analitik düzlemde $A(-3, 4)$ noktasının orijin etrafında, pozitif yönde $37°$ döndürülmesiyle B ve negatif yönde $83°$ döndürülmesiyle C noktası elde ediliyor.

Buna göre $|BC|$ **kaç birimdir?**

A) 1 B) 2 C) 5 D) $4\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

14. Analitik düzlemde $A(4\sqrt{2}, 0)$ noktasının orijin etrafında, pozitif yönde $150°$ döndürülmesiyle C noktası elde ediliyor.

$A(\widehat{AOC})$ **kaç birimkaredir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

15. Analitik düzlemde $4x - 3y = 0$ doğrusunun 12 birim yukarı ötelenmesiyle elde edilen doğrunun eksenler arasında kalan parçasının uzunluğu kaç birimdir?

A) 12 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

16. Analitik düzlemde $A(2, -4)$ noktasının $ax - by - 6 = 0$ doğrusuna göre simetriği $A'(2, 0)$ noktası olduğuna göre $a + b$ değeri kaçtır?

A) -3 B) -2 C) 1 D) 3 E) 6

17. Analitik düzlemde $A(x, y)$ noktasının orijin etrafında, pozitif yönde $120°$ döndürülmesiyle $A'(0, -4)$ noktası elde ediliyor.

Buna göre $x \cdot y$ kaçtır?

A) $-4\sqrt{3}$ B) $-2\sqrt{3}$ C) $-\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

18. Analitik düzlemde $A(2, -3)$ noktasının $d: 3x - 4y + 2 = 0$ doğrusuna göre simetriği A' noktasıdır.

d doğrusu üzerinde alınan B ve C noktaları da kullanılarak oluşturulan $ABA'C$ dörtgeninin alanı 20 birimkare ise $|BC|$ kaç birimdir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

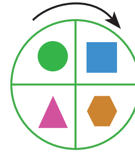
19. Analitik düzlemde $2x - 3y + a = 0$ doğrusunun orijin etrafında, negatif yönde $270°$ döndürülmesiyle elde edilen doğru $(-2, 5)$ noktasından geçtiğine göre a değeri kaçtır?

A) -1 B) -2 C) -3 D) -4 E) -5

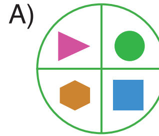
20. $5x + 2y - 6 = 0$ **doğrusunun $A(-2k, 5k)$ noktasına göre simetriği olan doğrunun y eksenini kestiği noktanın ordinatı kaçtır?**

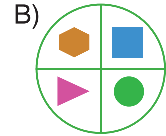
A) -1 B) -2 C) -3 D) -4 E) -5

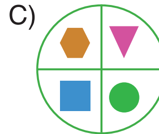
21.

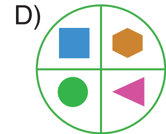


Yanda verilen daire biçimindeki şeklin merkezi etrafında, ok yönünde $810°$ döndürülmesiyle oluşacak görünümü aşağıdakilerden hangisi olur?

A)


B)


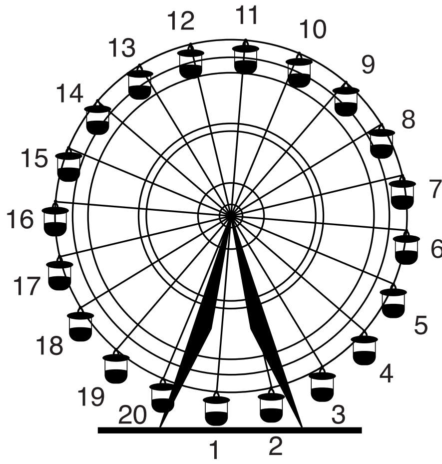
C)


D)


E)

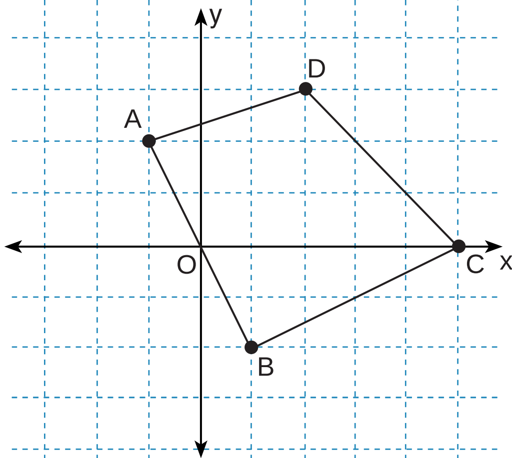

22-27. açık uçlu soruları cevaplayınız.

22.



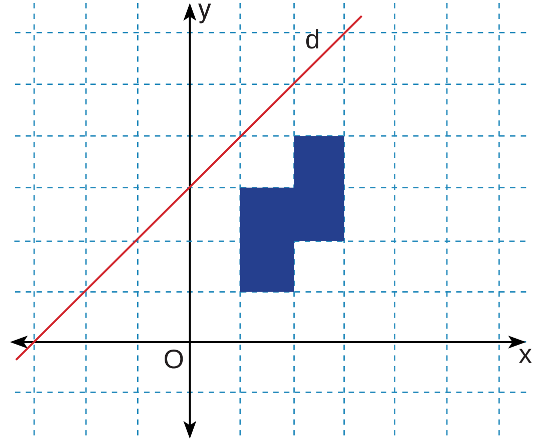
Kabinleri eşit aralıkta olan yukarıdaki dönme dolap, pozitif yönde 162° döndüğünde 1 numaralı kabinin hangi kabinin yerine geleceğini bulunuz.

23.



ABCD dörtgeninin x ekseni doğrultusunda, negatif yönde 2 birim; y ekseni doğrultusunda, pozitif yönde 2 birim ötelenmesinin ardından x eksenine göre simetriğinin alınması ile oluşan $A'B'C'D'$ dörtgenini analitik düzlemde çizerek gösteriniz.

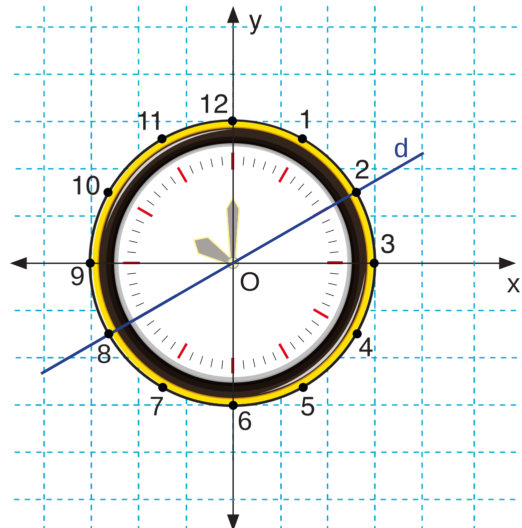
24.



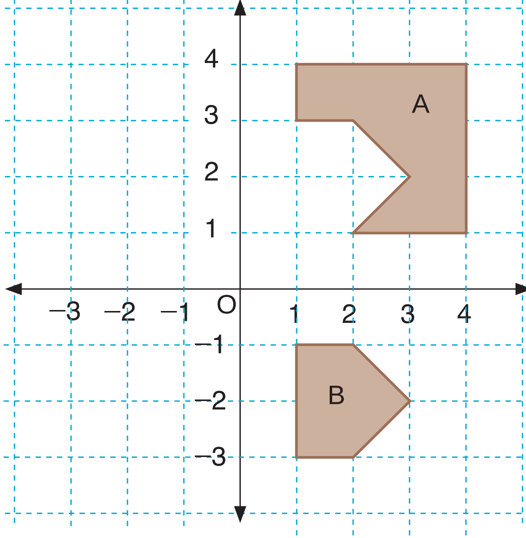
Yukarıda verilen şeklin d doğrusuna göre simetriği olan şekli çiziniz.

25. Çapının uzunluğu 12 birim olan bir saat, analitik düzlem üzerine aşağıdaki gibi yerleştirilmiş ve saatin 2 ile 8 i gösteren noktalarından geçen d doğrusu çizilmiştir. d doğrusu 3 birim sağa ve $3\sqrt{3}$ birim yukarı ötelenerek d' doğrusu, d' doğrusu da orijin etrafında saatin tersi yönde 30° döndürülerek d'' doğrusu elde ediliyor.

Buna göre d' ve d'' doğrularını çiziniz.



26.



Yukarıda analitik düzlemde verilen A ve B çokgenlerine aşağıdaki dönüşümlerden hangileri uygulandığında tam bir kare oluşur? İnceleyiniz.

a) A çokgenine dönüşüm uygulanmadan B çokgeni 4 birim yukarı ötelenirse

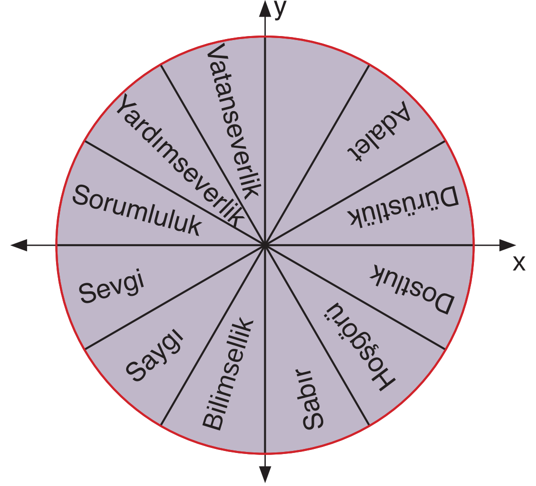
b) A çokgeni orijin etrafında, pozitif yönde 90° ve B çokgeni 180° döndürülürse

c) B çokgeninin y eksenine göre simetriği orijin etrafında, saat yönünde 90° döndürülür ve A çokgeni saat yönünün tersine 90° döndürülürse

ç) A çokgeninin orijine ve B çokgeninin y eksenine göre simetriği alınırsa

d) A çokgeninin y eksenine göre simetriği alınır ve B çokgeni 180° döndürülürse

27.



Matematik öğretmeni Aybüke yukarıda verilen daireyi çarkın merkezi analitik düzlemin orijini ile çakışacak şekilde12 eş parçaya bölmüştür. 11 parçaya değerlerden oluşan isim vermiştir.

Buna göre

a) Çark pozitif yönde 120° **döndürüldüğünde analitik düzlemin II. bölgesinde kalan değerlerin hangileri olduğunu bulunuz.**

b) Çark pozitif yönde 930° **döndürüldüğünde III. bölgede kalan değerlerin hangileri olduğunu bulunuz.**

c) Çark negatif yönde 240° **döndürüldüğünde dürüstlük değerinin hangi bölgede olacağını bulunuz.**

Daha fazla soruya ulaşmak için karekodu okutunuz



SAYILAR VE CEBİR

5. TÜREV

5.1. LİMİT VE SÜREKLİLİK
5.2. ANLIK DEĞİŞİM ORANI VE TÜREV
5.3. TÜREVİN UYGULAMALARI

Bu Bölümde Neler Öğreneceksiniz?

Limit ve Süreklilik
- Bir fonksiyonun bir noktadaki limitini, soldan limit ve sağdan limit kavramlarını,
- Limit ile ilgili özellikleri belirterek uygulamalar yapmayı,
- Bir fonksiyonun bir noktadaki sürekliliğini öğreneceksiniz.

Anlık Değişim Oranı ve Türev
- Türev kavramını,
- Bir fonksiyonun bir noktada ve bir aralıkta türevlenebilirliğini,
- Türevlenebilen iki fonksiyonun toplamının, farkının, çarpımının ve bölümünün türevlerini,
- İki fonksiyonun bileşkesinin türevini öğreneceksiniz.

Türevin Uygulamaları
- Bir fonksiyonun artan veya azalan olduğu aralıkları türev yardımı ile bulmayı,
- Bir fonksiyonun mutlak maksimum, mutlak minumum; yerel maksimum, yerel minumum noktalarını bulmayı,
- Türev yardımı ile fonksiyonların grafiğini çizmeyi,
- Maksimum ve minimum problemlerini türev kullanarak çözmeyi öğreneceksiniz.



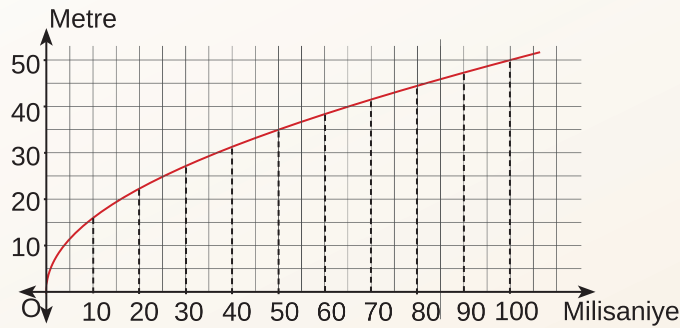
Alt öğrenme alanı karekodu

Alt öğrenme alanı sunu karekodu



Hazırlık Çalışması

Okçuluk sporu Türklerin ata sporlarından birisidir. Son yıllarda Türkiye'de okçuluk sporunda çok başarılı sonuçlar alınmıştır. Mete Gazoz, Tokyo 2020 Olimpiyatları'nda erkekler bireysel okçuluk kategorisinde Türk okçuluk tarihinin olimpiyatlardaki ilk altın madalyasını kazanmıştır.



Yukarıdaki grafik, atılan bir okun t milisaniyede aldığı yolu göstermektedir. Okun t milisaniyede aldığı yol $f(t) = 5\sqrt{t}$ biçiminde modellenmiştir.

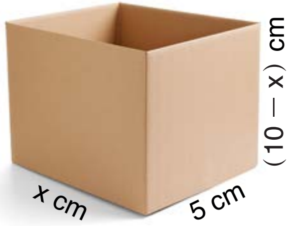
Yukarıda verilen grafiğe göre okun havada geçirdiği süre 100 milisaniyeye yaklaştıkça okun aldığı yolun kaç metreye yaklaştığını bulabilir misiniz?

5.1. LİMİT VE SÜREKLİLİK

Terimler ve Kavramlar

- **Bir noktada limit**
- **Sağdan limit**
- **Soldan limit**
- **Süreklilik**

Kenar ayrıtları 5 cm, x cm ve $(10 - x)$ cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki bir karton kutunun hacmi $f:\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 \cdot x \cdot (10 - x) = 50x - 5x^2$ biçiminde bulunur.



Buna göre

a) Hesap makinesi kullanarak fonksiyonun aldığı değerleri aşağıdaki tabloya yazınız.

b) x uzunluğu 5 cm'ye yaklaştığında kutunun hacminin yaklaştığı değeri bulabilir misiniz?

x, 5 e soldan yaklaşıyor. → ← x, 5 e sağdan yaklaşıyor.

x	4,9	4,99	4,999	5	5,001	5,01	5,1
$f(x) = 50x - 5x^2$	124,95						

$f(x)$, 125 e soldan yaklaşıyor. → ← $f(x)$, 125 e sağdan yaklaşıyor.

Bilgi

x değişkeninin a dan küçük değerlerle artarak a gerçek sayısına yaklaşmasına **soldan yaklaşım** denir ve $x \rightarrow a^-$ biçiminde gösterilir.
x değişkeninin a dan büyük değerlerle azalarak a gerçek sayısına yaklaşmasına **sağdan yaklaşım** denir ve $x \rightarrow a^+$ biçiminde gösterilir.

1. ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$ fonksiyonu verilmiştir.

Buna göre aşağıdaki tabloyu x in verilen değerlerine göre doldurunuz. x, 3 e sağdan ve soldan yaklaşırken $f(x)$ değerinin kaça yaklaştığını bularak f fonksiyonunun grafiği üzerinde gösteriniz.

x	2,9	2,99	2,999	3	3,001	3,01	3,1
$f(x) = x + 2$							

ÇÖZÜM

$x \to 3^-$ $\qquad$ $x \to 3^+$

x	2,9	2,99	2,999	3	3,001	3,01	3,1
$f(x) = x + 2$	4,9	4,99	4,999	5	5,001	5,01	5,1

Yukarıdaki tabloda ve yandaki grafikte görüldüğü gibi x, 3 e soldan yaklaşırken f fonksiyonunun aldığı değer 5 e yaklaşmaktadır. x, 3 e sağdan yaklaşırken f fonksiyonunun aldığı değer yine 5 e yaklaşmaktadır.

Ders İçi Uygulama 1 — Bireysel Çalışma

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 2 \\ x + 4, & x \geq 2 \end{cases}$

fonksiyonu verilmiştir.

Buna göre

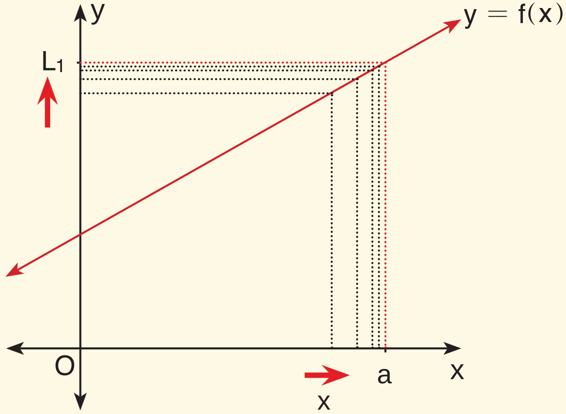
a) Aşağıdaki tabloyu x in verilen değerlerine göre doldurunuz.

x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 2 \\ x + 4, & x \geq 2 \end{cases}$							

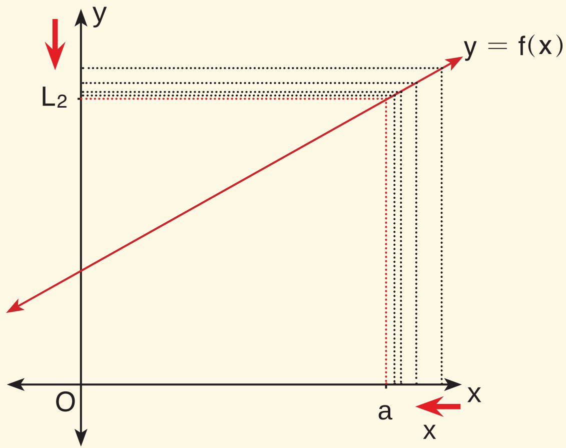
b) x, 2'ye soldan ve sağdan yaklaşırken $f(x)$ değerinin hangi sayılara yaklaştığını bulunuz.

c) Sizce x in 2'ye sağdan ve soldan yaklaştığında olduğu gibi f fonksiyonunun farklı değerlere yaklaştığı başka noktalar var mıdır? Açıklayınız.

Bilgi



$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere x değişkeni a sayısına soldan yaklaştığında $f(x)$ değeri L_1 gerçek sayısına yaklaşıyorsa $\mathbf{L_1}$ değerine f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki soldan limiti denir ve $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1$ biçiminde gösterilir.



$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere x değişkeni a sayısına sağdan yaklaştığında $f(x)$ değeri L_2 gerçek sayısına yaklaşıyorsa $\mathbf{L_2}$ değerine f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki sağdan limiti denir ve $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$ biçiminde gösterilir.

Bir fonksiyonun sağdan limiti soldan limitine eşit ise fonksiyonun bu noktada limiti vardır.
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1 = L_2 = L$ ise $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ olur.

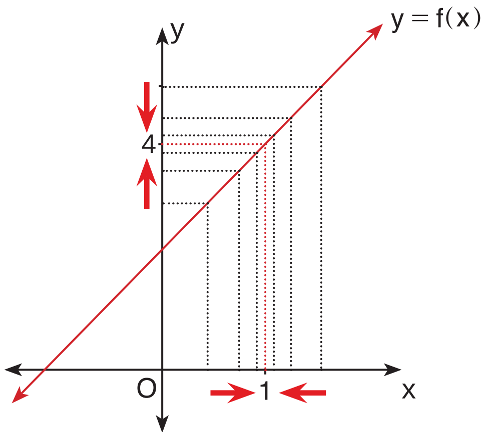
Fonksiyonun sağdan ve soldan limitleri birbirlerine eşit değilse fonksiyonun bu noktada limiti yoktur.
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ise $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ yoktur.

2. ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$ olmak üzere f fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki sağdan ve soldan limitini tablo ve grafik yardımı ile bulunuz. f fonksiyonunun bu noktada limiti var mıdır? Araştırınız.

ÇÖZÜM

x	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1
$f(x) = x + 3$	3,9	3,99	3,999	...	4	...	4,001	4,01	4,1



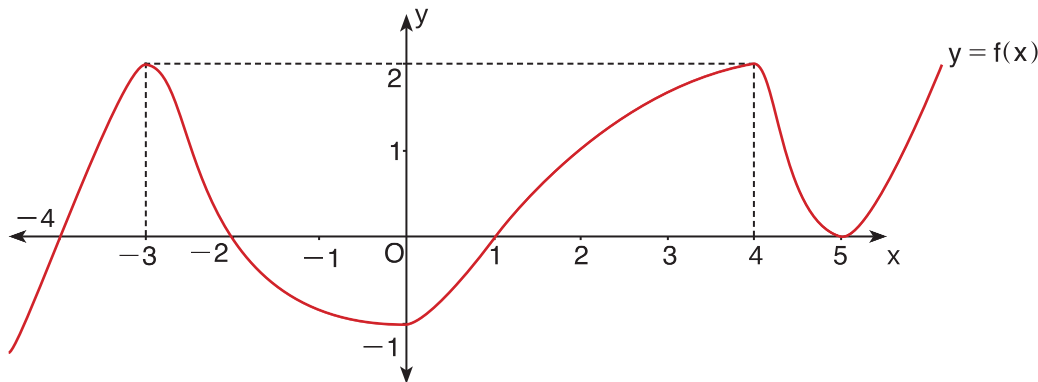
Tabloda ve grafikte görüldüğü gibi x değişkeni 1 sayısına soldan yaklaştığında f(x) değeri 4 sayısına yaklaşmaktadır. Bu durumda f fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktada soldan limiti 4 olur ve $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 4$ biçiminde gösterilir.

x değişkeni 1 sayısına sağdan yaklaştığında f(x) değeri 4 sayısına yaklaşmaktadır. Bu durumda f fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktada sağdan limiti 4 olur ve $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 4$ biçiminde gösterilir.

$x = 1$ apsisli noktada f fonksiyonunun sağdan limiti soldan limitine eşit olduğundan fonksiyonun bu noktada limiti vardır ve $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 4$ olduğundan $\lim_{x \to 1} f(x) = 4$ bulunur. Fonksiyonun $x = 1$ apsisli noktasındaki limit değeri ile bu noktada aldığı değer birbirine eşittir.

Ders İçi Uygulama 2

Bireysel Çalışma



Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonu için

a) Aşağıdaki limit değerlerini yanındaki boşluğa yazınız.

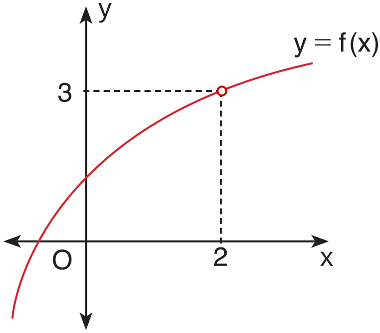
I. $\lim_{x \to -4^+} f(x) =$ .... **III.** $\lim_{x \to -3} f(x) =$ .... **V.** $\lim_{x \to 0} f(x) =$ ....

II. $\lim_{x \to 1} f(x) =$ .... **IV.** $\lim_{x \to 4} f(x) =$ .... **VI.** $\lim_{x \to 5} f(x) =$ ....

b) Grafiğine göre f fonksiyonunun limitinin olmadığı bir nokta var mıdır? Araştırınız.

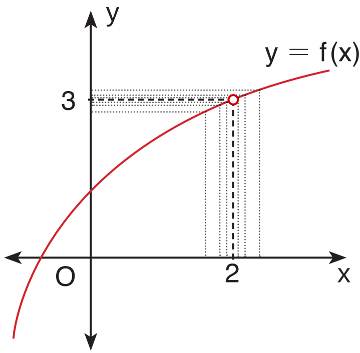
c) a seçeneğinde bulduğunuz limit değerleri ile fonksiyonun bu noktalarda aldığı değerleri karşılaştırınız.

3. ÖRNEK



Yanda grafiği verilen $f:\mathbb{R}-\{2\}\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonunun $x=2$ apsisli noktada varsa limit değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM



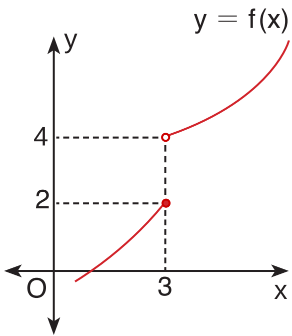
x, 2 ye sağdan yaklaşırsa $f(x)$ değeri 3 e yaklaşmaktadır. Bu durumda $\lim\limits_{x\rightarrow 2^+} f(x)=3$ olur.

x, 2 ye soldan yaklaşırsa $f(x)$ değeri 3 e yaklaşmaktadır. Bu durumda $\lim\limits_{x\rightarrow 2^-} f(x)=3$ olur.

$\lim\limits_{x\rightarrow 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\rightarrow 2^-} f(x)=3$ olduğundan $\lim\limits_{x\rightarrow 2} f(x)=3$ bulunur.

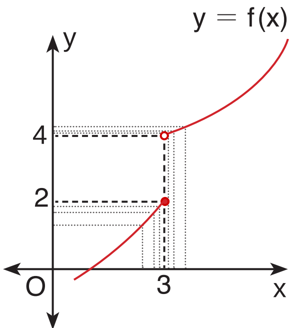
f fonksiyonu $x=2$ apsisli noktada tanımsız olduğu hâlde fonksiyonun limit değeri vardır. Bu durumda bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için o noktada tanımlı olması gerekmez.

4. ÖRNEK



Yanda grafiği verilen $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonunun $x=3$ apsisli noktada varsa limit değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM



x, 3 e sağdan yaklaşırsa $f(x)$ değeri 4 e yaklaşmaktadır. Bu durumda $\lim\limits_{x\rightarrow 3^+} f(x)=4$ olur.

x, 3 e soldan yaklaşırsa $f(x)$ değeri 2 ye yaklaşmaktadır. Bu durumda $\lim\limits_{x\rightarrow 3^-} f(x)=2$ olur.

$\lim\limits_{x\rightarrow 3^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\rightarrow 3^+} f(x)$ olduğundan $\lim\limits_{x\rightarrow 3} f(x)$ yoktur.

Ders İçi Uygulama 3 — Bireysel Çalışma

1.

Yukarıda verilen f fonksiyonunun grafiğine göre aşağıdaki limit değerlerini varsa bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to -4} f(x) =$ ....

c) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) =$ ....

d) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) =$ ....

b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$ ....

ç) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$ ....

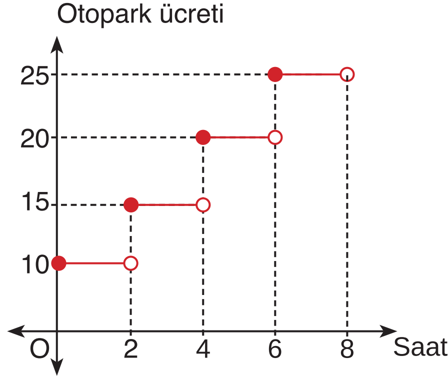
e) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) =$ ....

2.

Yukarıda gerçek sayılar kümesinde tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
g fonksiyonu $g(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) + \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ biçiminde tanımlandığına göre $g(-4) + g(2)$ değerini bulunuz.

Ders İçi Uygulama 4 — Bireysel Çalışma

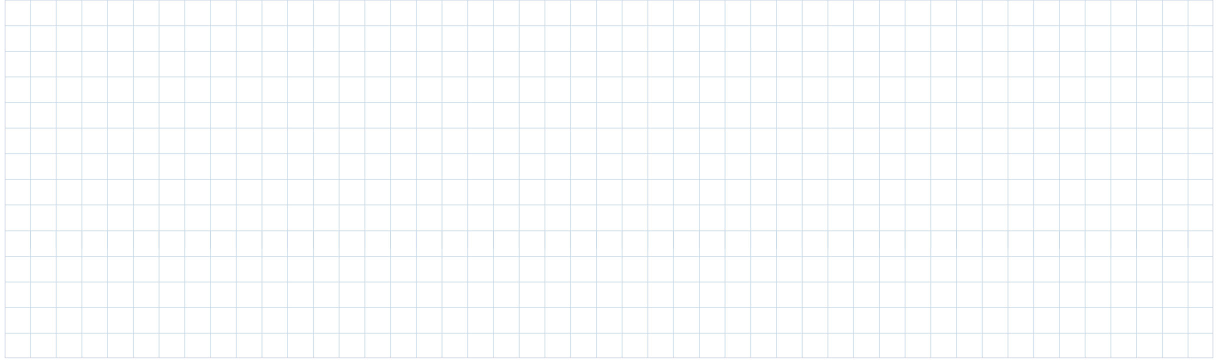
Bir otoparktaki park ücreti ilk 2 saate kadar 10 TL'dir. Otopark ücreti sonraki her 2 saat için 5 TL artmaktadır.



Buna göre

a) Otoparkta 1 saat 59 dakika ve 2 saat 1 dakika kalan araçlar için ödenecek ücreti bulunuz.

b) 5 saat 57 dakika otoparkta kalan bir araç için ödenecek toplam ücretin kaç TL olduğunu bulunuz.



Augustin Louis Cauchy (1789-1857)


Görsel 5.2
A. L. Cauchy
(Temsilî)

Cauchy (Koşi), 1789'da Paris'te doğdu. 1814 yılında karmaşık fonksiyonlar kuramını geliştirdi. Bugün Cauchy teoremi adıyla bilinen ünlü teoremi ifade ederek ispatladı.
(…)
Cauchy, arı ve uygulamalı matematiğin bütün bölümleriyle ilgilendi. Ama tarihe çözümleme üstüne yaptığı çalışmalarla geçti. 1821'de yayımlanan Cours d'analyse adlı kitabında çözümlemenin ana ilkelerini gözden geçirdi ve bunları yapıcı bir biçimde eleştirdi; böylece elementer fonksiyonların ve serilerin incelenmesine kesinlik kazandırdı.

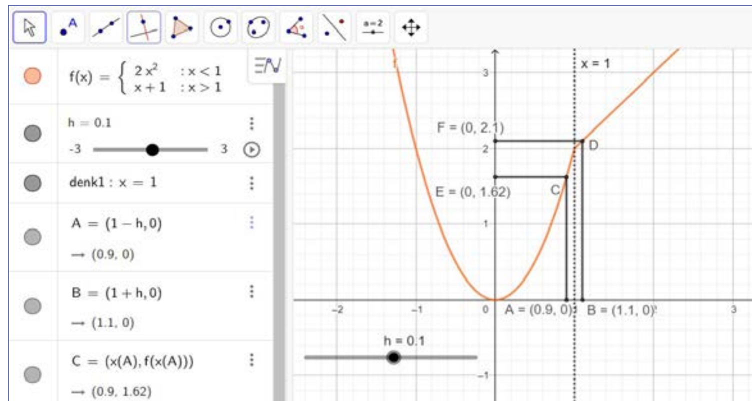
Genel ağdan alınmıştır.

(*) Metin, yazıldığı dönemin yazım ve noktalama kurallarına sadık kalınarak alınmıştır.

Ders İçi Uygulama 5 — Teknoloji

Dinamik matematik programını kullanarak bir fonksiyonun bir noktadaki limitini incelemek için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. Adım: Giriş kısmına ayrı ayrı **Eğer(x<1,2x²,Eğer(x>1,x+1))** yazılarak f parçalı fonksiyonunun grafiği çizilir.
2. Adım: Sürgü aracı seçildikten sonra grafik alanının boş bir yerine tıklanarak bir sürgü oluşturulur ve değerler **h=0.3, Min: -1, Maks: 1, Artış: 0.001** olarak ayarlanır.
3. Adım: Giriş kısmına **x=1** yazılarak oluşan doğrunun ayarlar menüsünden stil kesikli çizgi olarak ayarlanır.
4. Adım: Giriş kısmına ayrı ayrı **(1-h,0)** ve **(1+h,0)** yazılarak x ekseni üzerindeki A ve B noktaları oluşturulur.
5. Adım: Giriş kısmına ayrı ayrı **(x(A),f(x(A)))** ve **(x(B),f(x(B)))** yazılarak f fonksiyonunun grafiği üzerindeki C ve D noktaları oluşturulur.
6. Adım: Giriş kısmına ayrı ayrı **(0,y(C))** ve **(0,y(D))** yazılarak y ekseni üzerindeki E ve F noktaları oluşturulur.
7. Adım: Giriş kısmına ayrı ayrı **DoğruParçası(A,C), DoğruParçası(C,E), DoğruParçası(B,D)** ve **DoğruParçası(D,F)** yazılarak grafik üzerindeki C ile D noktalarının eksenler üzerindeki dik iz düşüm doğru parçaları çizilir.
8. Adım: A, B, E ve F noktaları seçilerek ayarlar menüsündeki “Etiketi göster” alanından “Ad & Değer” özelliği seçilir.
9. Adım: Sürgünün değeri önce **h=0.2** daha sonra **h=0.1** şeklinde değiştirilerek E ve F noktalarının ordinatlarının değerleri karşılaştırılır.



Yukarıdaki örneğe göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

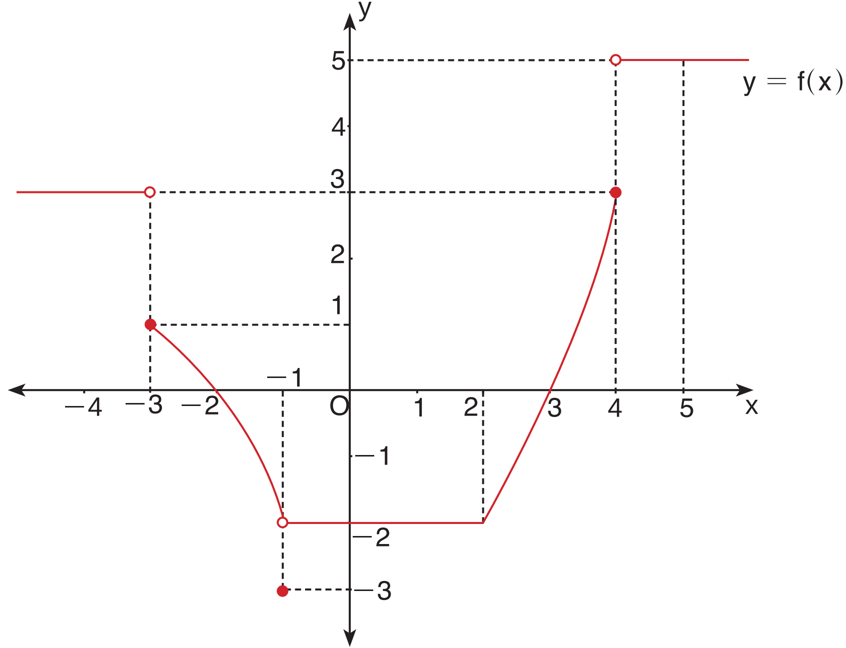
a) f fonksiyonunda $x < 1$ ve $x > 1$ için $f(1)$ değerlerini ayrı ayrı bulunuz.

b) h değeri azaldıkça E ve F noktalarının ordinatlarının hangi sayıya yaklaştığını bulunuz.

c) $\lim_{x\to1^-} f(x)$, $\lim_{x\to1^+} f(x)$ ve $\lim_{x\to1} f(x)$ değerlerini hesaplayınız.

ç) h nin değeri 0 olacak şekilde ayarlandığında C ve D noktalarının neden oluşmadığını açıklayınız.

1.



Aşağıdaki limit değerlerini yukarıdaki grafiğe göre bulunuz.

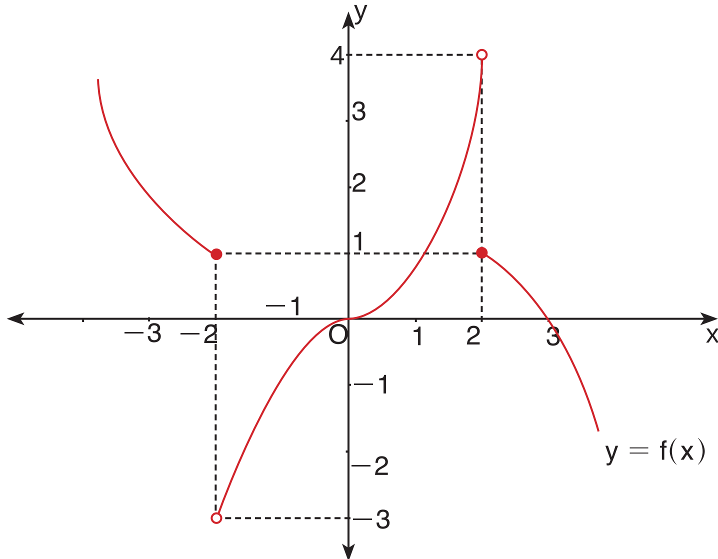
a) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

ç) $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

2.



Yukarıda verilen fonksiyonun grafiğine göre aşağıdakilerden doğru olanları bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 1$

b) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -3$

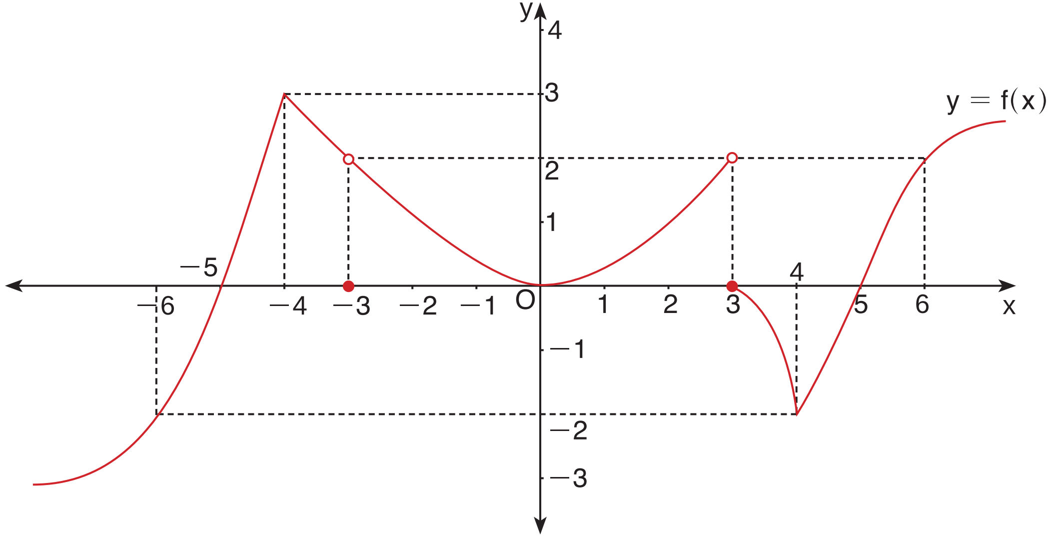
c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -2$

ç) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

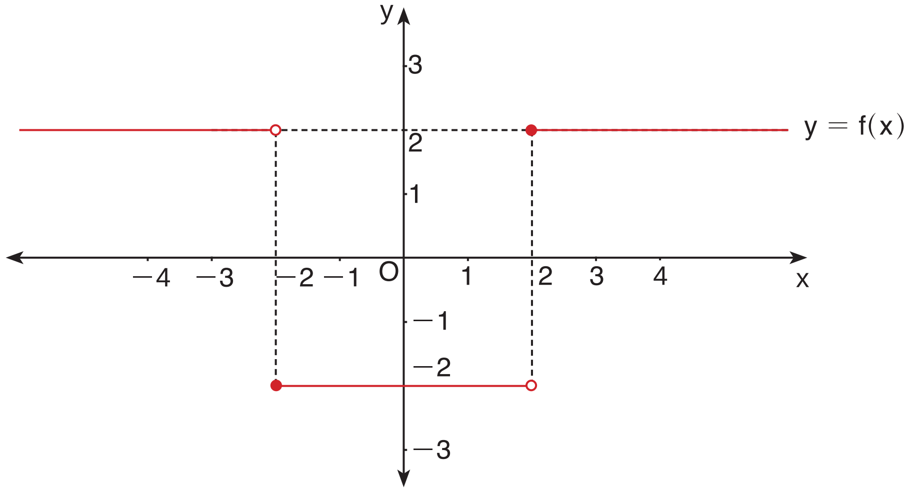
e) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$

3.



Yukarıda grafiği verilen $y = f(x)$ **fonksiyonunun** $(-6, 6)$ **nda hangi x tam sayı değerleri için limitinin olduğunu bulunuz.**

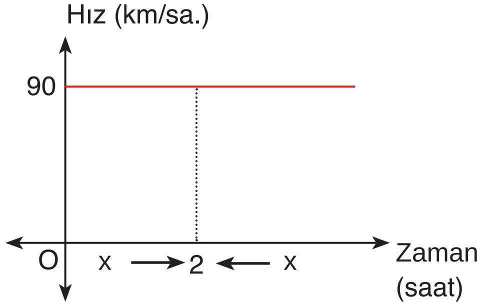
4.



$g(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ **olduğuna göre** $g(-3) + g(0) + g(3)$ **değerini bulunuz.**

Limit ile İlgili Özellikler ve Limit Uygulamaları

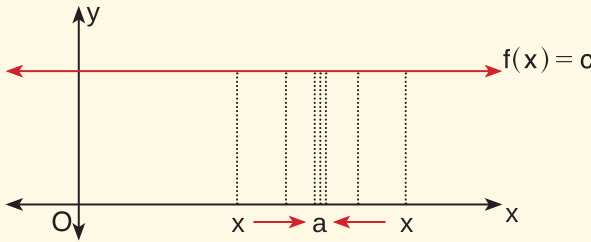
Sabit Bir Fonksiyonun Limiti



Yandaki grafikte bir aracın hız zaman grafiği verilmiştir. Buna göre 2 ye soldan yaklaştığında aracın hızı 90 km/sa. olmuştur. 2 ye sağdan yaklaştığında aracın hızı 90 km/sa. olur.

Buna göre $\lim\limits_{x \to 2} 90$ limit değeri için ne söylenebilir?

Bilgi



Yandaki grafikte $c \in \mathbb{R}$, $f(x) = c$ biçimindeki sabit fonksiyonlar x değişkeni a gerçek sayısına sağdan ve soldan yaklaştığında c değerini alacağı için $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} c = c$ olur.

5. ÖRNEK

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

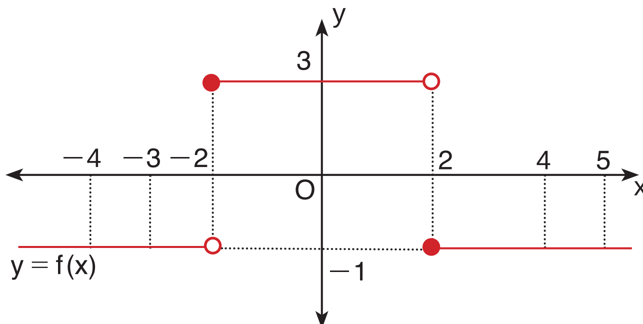
a) $\lim\limits_{x \to 2} 7$ **b)** $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} (-5)$ **c)** $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \left(\frac{2}{3}\right)$ **ç)** $\lim\limits_{x \to -\frac{4}{7}} \sqrt[3]{6}$

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to a} c = c$ olduğundan

a) $\lim\limits_{x \to 2} 7 = 7$ **b)** $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} (-5) = -5$ **c)** $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$ **ç)** $\lim\limits_{x \to -\frac{4}{7}} \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{6}$ olur.

Ders İçi Uygulama 6 **Bireysel Çalışma**



Yanda gerçek sayılar kümesinde tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre aşağıdaki limit değerlerini hesaplayınız.

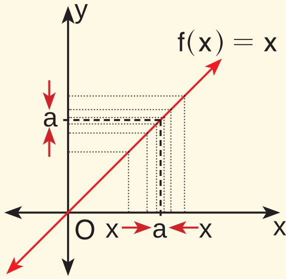
a) $\lim\limits_{x \to -4} f(x) =$ .... **ç)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$ ....

b) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) =$ .... **d)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x) =$ ....

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$ .... **e)** $\lim\limits_{x \to 5} f(x) =$ ....

$f(x) = x$ Fonksiyonunun Limiti

Bilgi



$a \in \mathbb{R}$ ve $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x$ şeklinde tanımlı birim fonksiyonu için x değişkeni a gerçek sayısına sağdan ve soldan yaklaştığında f fonksiyonunun aldığı değer a sayısına yaklaşır. Buradan $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} x = a$ bulunur.

6. ÖRNEK

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

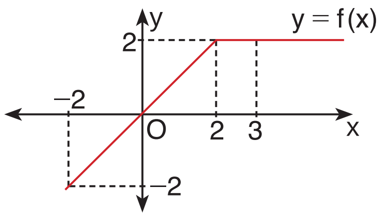
a) $\lim\limits_{x \to -2} x$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\frac{2}{9}} x$ **c)** $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} x$ **ç)** $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} x$

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to a} x = a$ olduğundan

a) $\lim\limits_{x \to -2} x = -2$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\frac{2}{9}} x = -\frac{2}{9}$ **c)** $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} x = \frac{1}{4}$ **ç)** $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} x = \sqrt{3}$ olur.

Ders İçi Uygulama 7 | **Bireysel Çalışma**



Yanda gerçek sayılar kümesinde tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $\dfrac{\lim\limits_{x \to -2} f(x) + \lim\limits_{x \to 1} f(x)}{\lim\limits_{x \to 3} f(x)}$ değerini hesaplayınız.

İki Fonksiyonun Toplamının ve Farkının Limiti

Bilgi

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere gerçek sayılar kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonlarının $x = a$ apsisli noktada limiti var olsun. Bu noktada f ve g fonksiyonlarının toplamının limiti, limitlerinin toplamına eşittir. Benzer şekilde bu noktada f ve g fonksiyonlarının farkının limiti, limitlerinin farkına eşittir.

$\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$ olur.

$\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$ olur.

7. ÖRNEK

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to 3} (x + 5)$

b) $\lim\limits_{x \to -2} (1 - x)$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to 3} (x + 5) = \lim\limits_{x \to 3} x + \lim\limits_{x \to 3} 5 = 3 + 5 = 8$ bulunur.

b) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to -2} (1 - x) = \lim\limits_{x \to -2} 1 - \lim\limits_{x \to -2} x = 1 - (-2) = 3$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 8

Bireysel Çalışma

Yanda gerçek sayılar kümesinde tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $\dfrac{\lim\limits_{x \to 4} f(x) + \lim\limits_{x \to 6} f(x)}{\lim\limits_{x \to -5} f(x)}$ değerini hesaplayınız.

İki Fonksiyonun Çarpımının Limiti

Bilgi

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere gerçek sayılar kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonlarının $x = a$ apsisli noktada limiti olsun. Bu noktada f ve g fonksiyonlarının çarpımının limiti fonksiyonların ayrı ayrı limitlerinin çarpımıdır. Bu durumda $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$ olur.

8. ÖRNEK

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonu $x = a$ apsisli noktada limiti olan bir fonksiyon olsun. Buna göre aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını gösteriniz.

a) $\lim\limits_{x \to a} [b \cdot f(x)] = b \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^n$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x \to a} [b \cdot f(x)] = \lim\limits_{x \to a} (b) \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$ olur.

b) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = \lim\limits_{x \to a} \underbrace{(f(x) \cdot f(x) \cdot \ldots \cdot f(x))}_{\text{n tane}} = \underbrace{\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \ldots \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)}_{\text{n tane}} = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^n$ olur.

9. ÖRNEK

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to -1} [(x-2)(x+3)]$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} (-5x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} [4 \cdot (x+2)^5]$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x \to -1} [(x-2)(x+3)] = \left(\lim\limits_{x \to -1} (x-2)\right) \cdot \left(\lim\limits_{x \to -1} (x+3)\right)$

$= (-1-2) \cdot (-1+3) = -3 \cdot 2 = -6$ bulunur.

b) $\lim\limits_{x \to 2} (-5x) = \left(\lim\limits_{x \to 2} (-5)\right) \cdot \left(\lim\limits_{x \to 2} x\right) = -5 \cdot 2 = -10$ bulunur.

c) $\lim\limits_{x \to 0} [4 \cdot (x+2)^5] = \left(\lim\limits_{x \to 0} 4\right) \cdot \left(\lim\limits_{x \to 0} (x+2)^5\right) = 4 \cdot \left(\lim\limits_{x \to 0} (x+2)\right)^5 = 4 \cdot 2^5 = 128$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 9 — **Bireysel Çalışma**

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to -1} [(x^3+2)(x^2-2)]$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} (-3x^2)$ **c)** $\lim\limits_{x \to -1} [-2 \cdot (x^4+1)^3]$

Polinom Fonksiyonların Limiti

Bilgi

$P(x)$ polinom fonksiyon olmak üzere $P(x)$ in her $x = a \in \mathbb{R}$ apsisli noktasındaki limiti
$\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$ olur.

10. ÖRNEK

$P(x) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ polinomu için aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to -2} P(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} P(x)$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x \to -2} P(x) = P(-2) = -(-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 1 = 8 + 12 + 8 + 1 = 29$ bulunur.

b) $\lim\limits_{x \to 1} P(x) = P(1) = -(1)^3 + 3 \cdot (1)^2 - 4 \cdot (1) + 1 = -1 + 3 - 4 + 1 = -1$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 10 — Bireysel Çalışma

$P(x) = 2x^5 - 5x^3 - x + 3$ ve $Q(x) = -x^2 + 4x - 1$ polinomları veriliyor. Buna göre aşağıda verilen limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to 0} [P^2(x) + Q(x)]$

b) $\lim\limits_{x \to 1} [3 \cdot P^2(x) - 2 \cdot Q^3(x)]$

İki Fonksiyonun Bölümünün Limiti

Bilgi

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere gerçek sayılar kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonları $x = a$ apsisli noktada limiti olan iki fonksiyon olsun. $g(x) \neq 0$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ olmak üzere $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ olur.

11. ÖRNEK

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x^3 - 3x^2 + 1}{2x - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^4 + 2x^3 - 3x - 1}{3x + 2}$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x^3 - 3x^2 + 1}{2x - 1} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 1}(4x^3 - 3x^2 + 1)}{\lim\limits_{x \to 1}(2x - 1)} = \dfrac{4 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1}{2 \cdot 1 - 1} = \dfrac{2}{1} = 2$ olur.

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^4 + 2x^3 - 3x - 1}{3x + 2} = \dfrac{\lim\limits_{x \to -1}(x^4 + 2x^3 - 3x - 1)}{\lim\limits_{x \to -1}(3x + 2)}$

$= \dfrac{(-1)^4 + 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 1}{3 \cdot (-1) + 2} = \dfrac{1}{-1} = -1$ olur.

Ders İçi Uygulama 11 — Bireysel Çalışma

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(2x^2 - x + 1)(x^3 + 6)}{x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-2}{3x^2 + 2x - 3}$

Köklü İfadelerin Limiti

Bilgi

$a \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $\lim_{x \to a} f(x)$ değeri varsa $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ olmak üzere

- n çift tam sayı, $f(x) \geq 0$ ve $\lim_{x \to a} f(x) \geq 0$ ise $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ olur.
- n tek tam sayı ise $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ olur.

12. ÖRNEK

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim_{x \to 1} \sqrt{x^2 + 2x + 6}$

b) $\lim_{x \to -2} \sqrt[3]{\dfrac{2x^2 + x + 2}{x + 1}}$

ÇÖZÜM

a) $\lim_{x \to 1} \sqrt{x^2 + 2x + 6} = \sqrt{\lim_{x \to 1} (x^2 + 2x + 6)} = \sqrt{1^2 + 2 \cdot 1 + 6} = \sqrt{9} = 3$ bulunur.

b) $\lim_{x \to -2} \sqrt[3]{\dfrac{2x^2 + x + 2}{x + 1}} = \sqrt[3]{\lim_{x \to -2} \dfrac{2x^2 + x + 2}{x + 1}}$

$= \sqrt[3]{\dfrac{2 \cdot (-2)^2 + (-2) + 2}{(-2) + 1}} = \sqrt[3]{-8} = -2$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 12 — Bireysel Çalışma

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 2}}{\sqrt[3]{x^3} - 2}$ olduğuna göre $\lim_{x \to 1} f(x)$ değerini bulunuz.

2. $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{x + 2}}}{\sqrt[3]{x - 10}}$ değerini bulunuz.

Üstel Fonksiyonların Limiti

Bilgi

b 1 den farklı pozitif gerçek sayı, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ limiti mevcut olmak üzere $\lim\limits_{x\to a} b^{f(x)} = b^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ olur.

13. ÖRNEK

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to -1} 2^{3x^2+x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} 3^{x^2-3x}$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x\to -1} 2^{3x^2+x+1} = 2^{\lim\limits_{x\to -1}(3x^2+x+1)} = 2^{3\cdot(-1)^2+(-1)+1} = 2^3 = 8$ bulunur.

b) $\lim\limits_{x\to 2} 3^{x^2-3x} = 3^{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x)} = 3^{(2)^2-3\cdot(2)} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 13 — **Bireysel Çalışma**

$\lim\limits_{x\to 5} 2^{ax+1} = 64$ ise a değerini bulunuz.

Logaritma Fonksiyonunun Limiti

Bilgi

$b\in\mathbb{R}^+$, $b\neq 1$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ limiti mevcut ve $\lim\limits_{x\to a} f(x)\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere
$\lim\limits_{x\to a}[\log_b f(x)] = \log_b\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$ olur.

14. ÖRNEK

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to -2}[\log_3(x^4-4x+3)]$

b) $\lim\limits_{x\to e}\left[\ln\left(\dfrac{3x^2}{4x-e}\right)\right]$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x\to -2}[\log_3(x^4-4x+3)] = \log_3\left(\lim\limits_{x\to -2}(x^4-4x+3)\right) = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3\cdot\underbrace{(\log_3 3)}_{1} = 3$ bulunur.

b) $\lim\limits_{x\to e}\left[\ln\left(\dfrac{3x^2}{4x-e}\right)\right] = \ln\left[\lim\limits_{x\to e}\left(\dfrac{3x^2}{4x-e}\right)\right] = \ln\left[\dfrac{\lim\limits_{x\to e}(3x^2)}{\lim\limits_{x\to e}(4x-e)}\right] = \ln\left(\dfrac{3e^2}{3e}\right) = \ln e = 1$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 14 — Bireysel Çalışma

$\lim\limits_{x \to 2} 5^{\log_{\sqrt{3}}(x^3 - 4x + 3)}$ limitinin değerini bulunuz.

Trigonometrik Fonksiyonların Limiti

Bilgi

$a \in \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f: A \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$\lim\limits_{x \to a} [\sin f(x)] = \sin\left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]$,

$\lim\limits_{x \to a} [\cos f(x)] = \cos\left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]$,

$\lim\limits_{x \to a} [\tan f(x)] = \tan\left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right] \quad \left(f(a) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$ ve

$\lim\limits_{x \to a} [\cot f(x)] = \cot\left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right] \quad (f(a) \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$ olur.

15. ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\sin 2x - \cos 3x}{\tan\left(\frac{3x}{4}\right) + \sqrt{3}}$ limitinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\sin 2x - \cos 3x}{\tan\left(\frac{3x}{4}\right) + \sqrt{3}} = \frac{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} (2\sin 2x - \cos 3x)}{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \left(\tan\left(\frac{3x}{4}\right) + \sqrt{3}\right)} = \frac{2\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right)}{\tan\left(\frac{3 \cdot \frac{\pi}{3}}{4}\right) + \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{1 + \sqrt{3}} = 1 \text{ olur.}$$

Ders İçi Uygulama 15 — Bireysel Çalışma

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\tan\left(\frac{x}{8}\pi\right)}{\sin\left(\frac{x}{4}\pi\right) + \cos(\pi x)}$ limitinin değerini bulunuz.

2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{8}} \dfrac{\sin^3 2x - \cos^3 2x}{\cos 2x}$ limitinin değerini bulunuz.

Parçalı Fonksiyonların Limiti

Bilgi

$A, B \subseteq \mathbb{R}$ ve $f: A \to B$ olmak üzere $f(x) = \begin{cases} g(x), & x < a \text{ ise} \\ c, & x = a \text{ ise} \\ h(x), & x > a \text{ ise} \end{cases}$

parçalı fonksiyonu verilsin. $x = a$ noktasına f fonksiyonunun **kritik noktası** denir.

I. Kritik nokta dışındaki noktalarda limit incelenirken o noktanın bulunduğu aralıktaki fonksiyon parçasının limiti incelenir.

$b \in \mathbb{R}$ ve $b < a$ ise $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \lim\limits_{x \to b} g(x)$ olur. $b > a$ ise $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \lim\limits_{x \to b} h(x)$ bulunur.

II. Kritik noktada fonksiyonunun limiti incelenirken fonksiyonun sağdan ve soldan limitine bakılır.

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} g(x) = L_1$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} h(x) = L_2$ olsun.

Buradan $L_1 = L_2$ ise $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vardır ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x)$ olur. $L_1 \neq L_2$ ise $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ yoktur.

16. ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x + 1, & x < 2 \text{ ise} \\ -3, & x = 2 \text{ ise} \\ \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$

şeklinde tanımlanan f parçalı fonksiyonu veriliyor. Buna göre aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (3x^2 - x + 1) = 3 \cdot 0^2 - 0 + 1 = 1$ bulunur.

b) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x + 2} \right) = \dfrac{4^2 - 1}{4 + 2} = \dfrac{15}{6} = \dfrac{5}{2}$ bulunur.

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x^2 - x + 1) = 3 \cdot 2^2 - 2 + 1 = 11$ ve

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x + 2} \right) = \dfrac{2^2 - 1}{2 + 2} = \dfrac{3}{4}$ bulunur.

Buradan $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ yoktur.

17. ÖRNEK

$m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \begin{cases} mx^2 + x - 2, & x < 1 \text{ ise} \\ 3x + 1, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

şeklinde tanımlanan f parçalı fonksiyonu veriliyor.
$x = 1$ noktasında f fonksiyonunun limiti var olduğuna göre m değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ varsa $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ olur. Buradan

$\lim\limits_{x\to 1^-} (mx^2 + x - 2) = \lim\limits_{x\to 1^+} (3x + 1) \Rightarrow m \cdot 1^2 + 1 - 2 = 3 \cdot 1 + 1 \Rightarrow m - 1 = 4 \Rightarrow m = 5$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 16 — **Bireysel Çalışma**

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x < 2 \text{ ise} \\ x + 4, & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad g(x) = \begin{cases} x - 4, & x < 6 \text{ ise} \\ 1, & x = 6 \text{ ise} \\ x + 1, & x > 6 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğuna göre $\lim\limits_{x\to 2^+} g(f(x)) + \lim\limits_{x\to 6^-} f(g(x))$ değerini bulunuz.

$\frac{0}{0}$ Belirsizliği

Bilgi

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ ve $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ olmak üzere $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{0}{0}$ olur. $\dfrac{0}{0}$ durumuna **belirsizlik durumu** denir. Belirsizlik durumunda $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ rasyonel ifadesinin pay ve paydası çarpanlarına ayrılarak sadeleştirme yapılır ve belirsizlik durumu ortadan kaldırılır.

18. ÖRNEK

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \dfrac{1^3 - 1}{1^2 - 1} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği olduğundan $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ ifadesi çarpanlarına ayrılır ve sadeleştirme işlemi yapılırsa

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x - 1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x - 1)}(x + 1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2 + x + 1)}{(x + 1)} = \frac{1^2 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2} \text{ olur.}$$

19. ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 - 8x^2 + 16}{(x+2)(x^2 - x - 6)}$ değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 - 8x^2 + 16}{(x+2)(x^2 - x - 6)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(-2)^4 - 8(-2)^2 + 16}{(-2+2)((-2)^2 - (-2) - 6)} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği olduğundan verilen ifade çarpanlarına ayrılır ve sadeleştirme işlemi yapılırsa

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{(x+2)(x^2 - x - 6)} = \lim_{x \to -2} \frac{(x^2 - 4)^2}{(x+2)(x+2)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x-2)^2 \cdot \cancel{(x+2)^2}}{\cancel{(x+2)^2}(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x-2)^2}{x-3} = \frac{(-2-2)^2}{-2-3} = -\frac{16}{5} \text{ olur.}$$

20. ÖRNEK

$m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + nx - 12}{x + 3} = m$ olduğuna göre $m + n$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(-3)^2 + n \cdot (-3) - 12}{-3 + 3} = \dfrac{-3n - 3}{0} = m$ olur. m bir gerçek sayı olduğundan $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği olmalıdır. Buradan $-3n - 3 = 0 \Rightarrow n = -1$ bulunur. n değeri yerine yazılarak limit hesaplanırsa

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - x - 12}{x + 3} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x-4)\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}} = \lim\limits_{x \to -3} (x - 4) = -7$ olduğundan

$m = -7$ elde edilir. Buradan $m + n = -7 - 1 = -8$ olur.

21. ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - x}$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - x} = \dfrac{\sqrt{1} - 1}{\sqrt{1} - 1} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

Verilen ifade çarpanlarına ayrılıp sadeleştirme yapılarak belirsizlik durumu kaldırılır.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - x} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-(1 - \sqrt{x})}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-1}{\sqrt{x}} = \frac{-1}{1} = -1 \text{ olur.}$$

22. ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 1}{6^x - 3^x + 2^x - 1}$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 1}{6^x - 3^x + 2^x - 1} = \dfrac{2^0 - 1}{6^0 - 3^0 + 2^0 - 1} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

Verilen ifade çarpanlarına ayrılıp sadeleştirme yapılarak belirsizlik durumu kaldırılır.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{6^x - 3^x + 2^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{2^x \cdot 3^x - 3^x + 2^x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{3^x(2^x - 1) + 2^x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{2^x - 1}}{(\cancel{2^x - 1})(3^x + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3^x + 1} = \frac{1}{3^0 + 1} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Ders İçi Uygulama 17 — Bireysel Çalışma

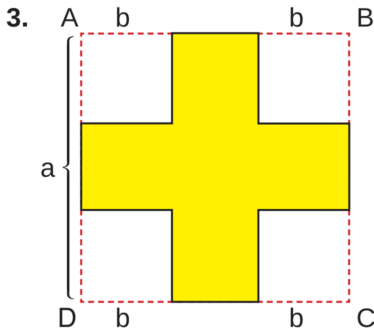
1. Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

2. a, b $\in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + ax - 6}{x^2 - 4} = b$ ise $a \cdot b$ değerini bulunuz.

3.



Bir kenar uzunluğu a birim olan kare şeklinde bir kâğıttan bir kenar uzunluğu b birim olan kare şeklinde dört eş parça görseldeki gibi çıkarılıyor. Parçalar çıkarıldıktan sonra geriye kalan sarı boyalı bölgenin alanı S birimkare oluyor.

Buna göre $\lim\limits_{b \to \frac{a}{2}} \dfrac{S}{a - 2b}$ limitinin değerini bulunuz.

ALIŞTIRMALAR 5.2

1. $\lim\limits_{x \to 2} (3x^3 - 4ax + 5) = 5$ **olduğuna göre a değerini bulunuz.**

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x^2 - x + 1)(x^3 + 1)}{\sqrt{x^2 + 3}}$ **değerini bulunuz.**

3. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ **ve** $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$ **olduğuna göre aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4f(x) - 3g(x)}{f(x) - g(x)}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2^{f(x)}}{\sqrt{2g(x)}}$

4. $f(x) = 3^{x+2} - \log_x (x^2 + 4)$ **olduğuna göre** $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ **değerini bulunuz.**

5. Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin x - \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{6}}{\sqrt{3}(\cos x - \cot x)}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x - \cos 5x}{5x + 1}$

6. $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1, & x < 2 \\ x^4 - 2x + 1, & x \geq 2 \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = b$ **olduğuna göre** $a + b$ **değerini bulunuz.**

7. $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \leq -2 \\ x^3 + bx + 2, & -2 < x < 1 \\ x^3 + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

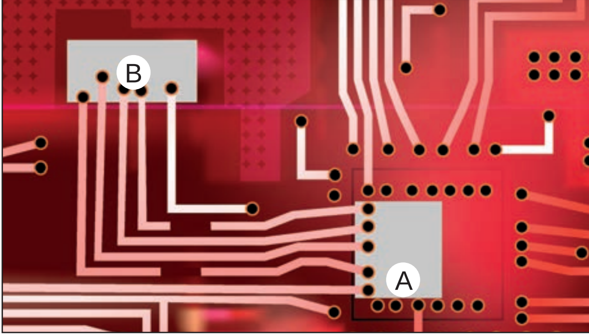
fonksiyonu veriliyor.

f fonksiyonunun tüm gerçek sayılarda limiti olduğuna göre $a + b$ **değerini bulunuz.**

8. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x + 10} - 3}{x + 1}$ **değerini bulunuz.**

9. $a, b \in \mathbb{R}$ **olmak üzere** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - ax + 2}{x - 2} = b$ **ise** $a \cdot b$ **değerini bulunuz.**

Süreklilik



Görsel'de bir bilgisayar ana kartında veri akışını sağlayan veri yolları görülmektedir. Veri akışının sağlanması için veri yollarının sürekli olması gerekir.

Buna göre görseldeki A ve B birimleri arasındaki veri yollarından hangileri süreklidir? Bulunuz.

Bilgi

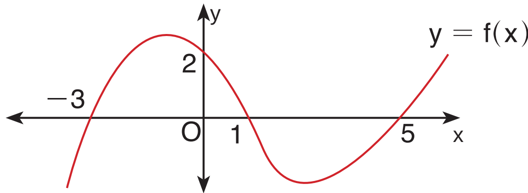
Tanım kümesi $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f: A \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan bir f fonksiyonu verilsin. $a \in A$ olmak üzere $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ise **f fonksiyonu** $x = a$ **apsisli noktada süreklidir** denir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise **f fonksiyonu A kümesi üzerinde süreklidir** denir. Bir $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in \mathbb{R}$ apsisli noktada sürekli değil ise fonksiyona **bu noktada süreksizdir** denir.

Buna göre bir f fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktada sürekli olması için
- f fonksiyonu a apsisli noktada tanımlı olmalıdır.
- f fonksiyonunun a apsisli noktada limiti olmalıdır.
- f fonksiyonunun a apsisli noktadaki limit değeri ile a apsisli noktadaki fonksiyonun aldığı değer birbirine eşit olmalıdır.

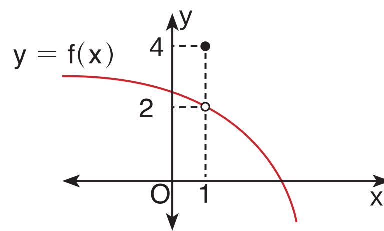
23. ÖRNEK

Aşağıda grafiği verilen fonksiyonların sürekli olduğu en geniş kümeyi bulunuz.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$



b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$



ÇÖZÜM

a) Her $a \in \mathbb{R}$ için f fonksiyonu tanımlıdır, $\lim_{x \to a} f(x)$ vardır ve $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ olur. Bu durumda f fonksiyonu $\mathbb{R}$ de süreklidir.

b) Her $a \in \mathbb{R}$ için f fonksiyonu tanımlıdır, $\lim_{x \to a} f(x)$ vardır ancak

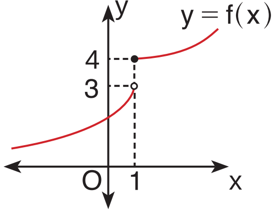
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \to 1} f(x) &= 2 \\ f(1) &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1) \text{ olur.}$$

Bu durumda f fonksiyonu $x = 1$ de süreksizdir. f fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R} - \{1\}$ olur.

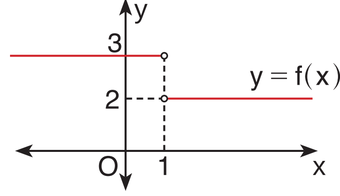
24. ÖRNEK

Aşağıda grafiği verilen fonksiyonların sürekli olduğu en geniş kümeyi bulunuz.

a) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y = f(x)$



b) $f:\mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R},\ y = f(x)$



ÇÖZÜM

a) Her $a \in \mathbb{R}$ için f fonksiyonu tanımlıdır,

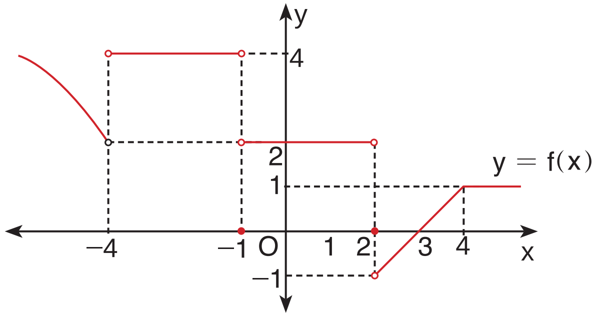
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$ ve $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ yoktur. Bu durumda f fonksiyonu

$x = 1$ noktasında süreksizdir. f fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R} - \{1\}$ olur.

b) Her $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ için f fonksiyonu tanımlıdır, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vardır ve $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ olur. Bu durumda f fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R} - \{1\}$ olur. f fonksiyonunun tanım kümesi de $\mathbb{R} - \{1\}$ olduğu için $x = 1$ noktasında sürekliliğe bakılmaz.

Ders İçi Uygulama 18 — Bireysel Çalışma



Yanda grafiği verilen $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y = f(x)$ fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş kümeyi bulunuz.

Bilgi

$A \subseteq \mathbb{R}$, $f:A \to \mathbb{R}$ ve $g:A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $a \in A$ apsisli noktada sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda

- $f + g$ fonksiyonu $x = a$ apsisli noktada süreklidir.
- $f - g$ fonksiyonu $x = a$ apsisli noktada süreklidir.
- $f \cdot g$ fonksiyonu $x = a$ apsisli noktada süreklidir.
- $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $k \cdot f$ fonksiyonu $x = a$ apsisli noktada süreklidir.
- $g(a) \neq 0$ olmak üzere $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonu $x = a$ apsisli noktada süreklidir.
- Polinom fonksiyonlar gerçek sayılar kümesinde süreklidir.

25. ÖRNEK

Aşağıdaki fonksiyonların sürekli olduğu en geniş kümeyi bulunuz.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-16}, & x < 3 \text{ ise} \\ 4, & x = 3 \text{ ise} \\ \frac{x+1}{x-2}, & x > 3 \text{ ise} \end{cases}$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x^2-1}}$

d) $f(x) = \log_2\left(\frac{x^2-4}{3-x}\right)$

ÇÖZÜM

a) Paydayı 0 yapan değerler f fonksiyonunu tanımsız yaptığından tanım kümesinden çıkarılır.
$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ ve $x_2 = -2$ olur. Buradan f fonksiyonunun en geniş tanım kümesi $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ olur. Her $a \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ için $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vardır ve $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ olur. Bu durumda f fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ bulunur.

b) Fonksiyonu tanımsız yapan değerler tanım kümesinden çıkarılır.
$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = -4$ veya $x = 4$ olur. f fonksiyonunda tanım aralığı $x < 3$ olduğundan sadece $x = -4$ değeri fonksiyonu tanımsız yapar. $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ değeri $x > 3$ aralığında olmadığı için fonksiyonu tanımsız yapmaz. Fonksiyonun en geniş tanım kümesi $\mathbb{R} - \{-4\}$ olur.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2-1}{x^2-16} &= \frac{3^2-1}{3^2-16} = -\frac{8}{7} \\ \lim_{x \to 3^+} \frac{x+1}{x-2} &= \frac{3+1}{3-2} = 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x) \text{ olduğundan } \lim_{x \to 3} f(x) \text{ yoktur.}$$

Buradan f fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R} - \{-4, 3\}$ bulunur.

c) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x^2-1}}$ fonksiyonunun tanımlı olduğu en geniş küme için $x^2 - 1 \neq 0$ ve $\frac{x+3}{x^2-1} \geq 0$ sağlanmalıdır. Buradan $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ veya $x \neq -1$ olur.

	$-\infty$	-3		-1		1		∞
$\frac{x+3}{x^2-1} \geq 0$	$-$	●	$+$	○	$-$	○	$+$	
			Çözüm				Çözüm	

$\frac{x+3}{x^2-1} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $[-3, -1) \cup (1, +\infty)$ olur. Bu durumda f fonksiyonunun en geniş tanım kümesi $[-3, -1) \cup (1, +\infty)$ bulunur. Her $a \in [-3, -1) \cup (1, +\infty)$ için $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ olduğundan f fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş küme $[-3, -1) \cup (1, +\infty)$ bulunur.

d) f fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş küme için $\frac{x^2-4}{3-x} > 0$ ve $3 - x \neq 0$ olmalıdır.

	$-\infty$		-2		2		3		∞
$\frac{x^2-4}{3-x} > 0$		$+$	○	$-$	○	$+$	○	$-$	
		Çözüm				Çözüm			

Buradan sürekli olduğu en geniş küme $(-\infty, -2) \cup (2, 3)$ olur.

Bilgi

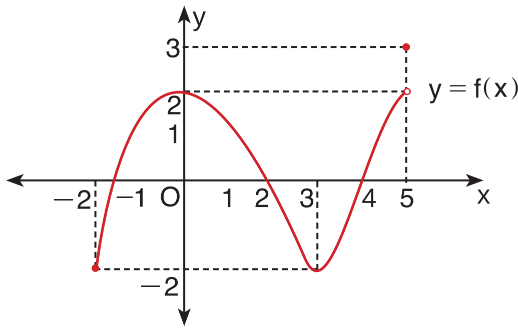
$A = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a, b \in A$ olsun.

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a) \Leftrightarrow$ f fonksiyonu $x = a$ apsisli noktada sağdan süreklidir.

$\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b) \Leftrightarrow$ f fonksiyonu $x = b$ apsisli noktada soldan süreklidir.

$[a, b]$ nda tanımlı bir fonksiyon aralığın bütün iç noktalarında, a noktasında sağdan ve b noktasında soldan sürekli ise **f fonksiyonu** $[a, b]$ **aralığında süreklidir** denir.

26. ÖRNEK



Yanda grafiği verilen $[-2, 5]$ nda tanımlı f fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş kümeyi bulunuz.

ÇÖZÜM

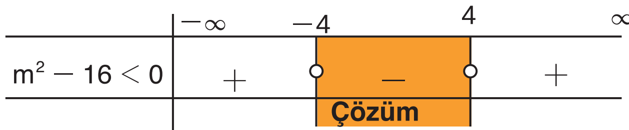
f fonksiyonu $(-2, 5)$ nda süreklidir. $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = f(-2)$ olduğundan fonksiyon $x = -2$ noktasında sağdan süreklidir. $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) \neq f(5)$ olduğundan fonksiyon $x = 5$ noktasında soldan sürekli değildir. Bu durumda f fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş küme $[-2, 5)$ olur.

27. ÖRNEK

$f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - mx + 4}$ kuralı ile verilen f fonksiyonu bütün gerçek sayılar kümesinde sürekli olduğuna göre m nin değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonu bütün gerçek sayılar kümesinde sürekli olduğundan paydayı sıfır yapan değer olmamalıdır. Buradan her $x \in \mathbb{R}$ için $x^2 - mx + 4 \neq 0$ olması için $\Delta < 0$ olduğundan
$\Delta = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 < 0$ olur.



m nin değer aralığı $(-4, 4)$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 19 — Bireysel Çalışma

1. Yanda verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun sürekli olmadığı noktaları bulunuz.

2. $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{\sqrt{x^2 - mx + 6}}$ kuralı ile verilen f fonksiyonu gerçek sayılar kümesinde sürekli ise m nin değer aralığını bulunuz.

Limitin Tarihsel Gelişimi ve Salih Zeki (1864-1921)

On yedinci yüzyılda kalkülüsün icadından sonraki yıllarda matematikçiler limitin doğasını düşündü ve tartıştı. Sezgi, grafik ve sayısal örneklerin böylesine önemli bir kavram için zayıf bir temel sağladığı fark edilmişti.

(…)

Kalkülüs çalışması, Fransız matematikçi Augustin-Louis Cauchy (Ogüsten Lui Koşi) ile başlayan ve sonra Alman matematikçi Karl Wilhelm Weierstrass (Karl Vilhem Vaysthast) ile devam eden, artan bir matematiksel disiplin döneminden geçmiştir.

(…)

$\varepsilon - \delta$ tanımı ile bilinen limit kavramını kuran kişi, Karl Wilhelm Weierstrass'tır.

Calculus Cilt 1

(*) Metin, yazıldığı dönemin yazım ve noktalama kurallarına sadık kalınarak alınmıştır.

Salih Zeki, hiç şüphesiz iyi yetişmiş bir bilim adamıdır. Bilim hayatında iki büyük hizmette bulunmuştur. Birincisi, İslâm dünyasındaki bilim hareketlerini inceleyerek Türk toplumuna tanıtmıştır. Bu konuda da ilk adımı atan olmuştur. İkincisi, Batı'daki çağının bilim hareketleriyle ilgili yeni fikirleri, tartışarak toplumumuza tanıtmıştır.

(…)

Eserleri: Âsâr-ı Bâkiye, Kâmûs-ı Riyaziyât.

Görsel 5.4
Salih Zeki

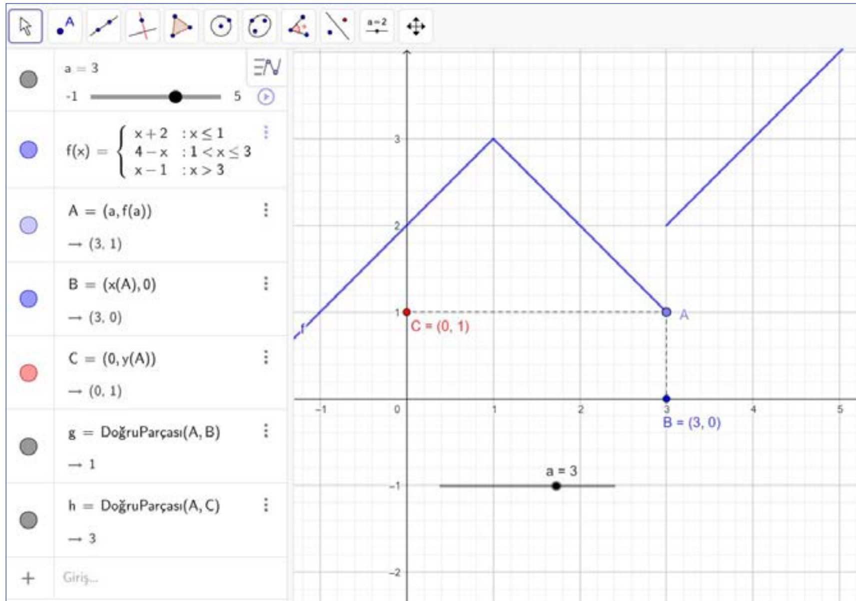
İslâm Bilim Adamları

(*) Metin, yazıldığı dönemin yazım ve noktalama kurallarına sadık kalınarak alınmıştır.

Ders İçi Uygulama 20 — Teknoloji

Dinamik matematik programını kullanarak bir fonksiyonun sürekliliğini incelemek için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. Adım: Giriş kısmına **Eğer(x≤1,x+2,Eğer(1<x≤3,4-x,Eğer(x>3,x-1)))** yazılarak f parçalı fonksiyonunun grafiği çizilir.
2. Adım: Sürgü aracı seçildikten sonra grafik alanının boş bir yerine tıklanarak bir sürgü oluşturulur ve değerler **a=2, Min: -1, Maks: 5, Artış: 0.001** olarak ayarlanır.
3. Adım: Giriş kısmına **(a,f(a))** yazılarak f fonksiyonunun grafiği üzerindeki A noktası oluşturulur.
4. Adım: Giriş kısmına **(x(A),0)** yazılarak x ekseni üzerindeki B noktası oluşturulur.
5. Adım: Giriş kısmına **(0,y(A))** yazılarak y ekseni üzerindeki C noktası oluşturulur.
6. Adım: Giriş kısmına ayrı ayrı **DoğruParçası(A,B)** ve **DoğruParçası(A,C)** yazılarak grafik üzerindeki A noktasının eksenler üzerindeki dik iz düşüm doğru parçaları çizilir.
7. Adım: B ve C noktaları seçilerek ayarlar menüsündeki “Etiketi göster” alanından “Ad & Değer” özelliği seçilir.
8. Adım: Sürgünün değeri önce **a=1** daha sonra **a=3** şeklinde değiştirilerek fonksiyonun bu noktalardaki soldan ve sağdan limitleri C noktasının ordinatı ile karşılaştırılır.
9. Adım: Sürgü hareket ettirilerek her bir değer için fonksiyonun o noktadaki soldan limiti, sağdan limiti, aldığı değer karşılaştırılır ve fonksiyonun sürekliliği incelenir.

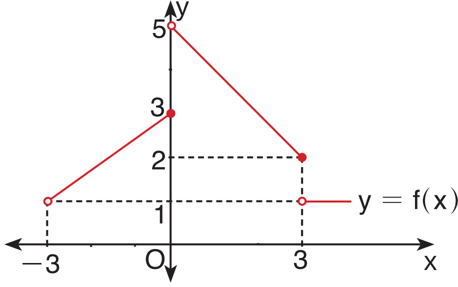


Yukarıdaki örneğe göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) $x = 3$ noktasında f fonksiyonunun neden sürekli olmadığını açıklayınız.

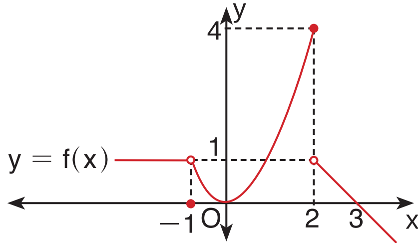
b) f fonksiyonunun tanım kümesinden $x = 1$ noktası çıkartılırsa fonksiyonun bu noktadaki limiti ile sürekliliğindeki değişimleri inceleyiniz.

1.



Yukarıda verilen f fonksiyonunun grafiğine göre $\sum_{k=-1}^{1}\left(\lim_{x\to k^+} f(3x)\right)$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

2.



Yukarıda verilen f fonksiyonunun grafiğine göre aşağıdaki ifadelerden doğru olanları bulunuz.

I. $\lim_{x\to -1} f(x) = 0$

II. $\lim_{x\to 0} f(x)$ değeri yoktur.

III. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$

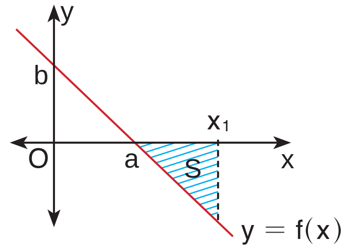
IV. $\lim_{x\to 1} f(x)$ değeri yoktur.

3. $y = f(x)$ **fonksiyonu için** $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x^2-1} = 5$ **olduğuna göre** $\lim_{x\to 1}\dfrac{2f(x)+x+1}{3x-2}$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

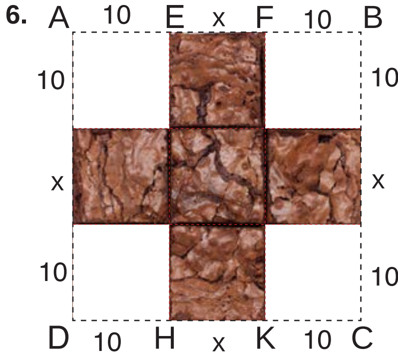
4. Başkatsayısı 2 olan 2. dereceden bir $P(x)$ polinomu $(x-2)$ ile bölündüğünde kalan 3 olmaktadır.

$\lim_{x\to 3}\dfrac{P(x)}{x^2-9}$ **ifadesinin değeri bir gerçek sayı olduğuna göre** $P(x-1)$ **polinomunun sabit terimini bulunuz.**

5.



Yukarıda verilen f fonksiyonun grafiğinde S taralı üçgenin alanı olmak üzere $\lim_{x_1\to a^+}\dfrac{(x_1-a)^2}{S}$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

6. 

Yukarıdaki şekilde üstten görünümü verilen bir doğum günü pastası, köşelerinden küp şeklinde eş parçalar kesilerek 4 çocuğa paylaştırılmıştır.

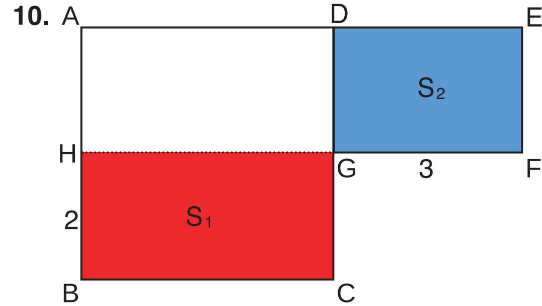
$|EF| = x$, $|AE| = 10$ **ve S kalan pastanın üst yüzünün alanı olmak üzere** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{S}{|EF|}$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

7. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - mx + 9}$ **şeklinde tanımlanan f fonksiyonu bütün gerçek sayılar kümesinde sürekli ise m nin değer aralığını bulunuz.**

8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+7}{x+1}, & x < 2 \text{ ise} \\ mx + 1, & x = 2 \text{ ise} \\ 3x + n, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $x = 2$ **noktasında sürekli ise** $m + n$ **değerini bulunuz.**

9. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 4}$ **fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş aralığı bulunuz.**

10. 

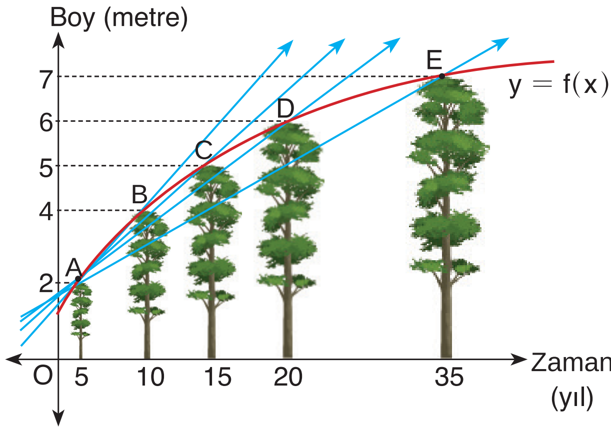
Yukarıdaki görselde ABCD karesinden BCGH dikdörtgeni çıkartılıp kalan parçaya GFED dikdörtgeni ekleniyor. S_1 **kırmızı bölge,** S_2 **mavi bölgenin alanı ve** $|AB| = x$ **olduğuna göre** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{S_1 \cdot S_2}$ **limitinin değerini bulunuz.**

5.2. ANLIK DEĞİŞİM ORANI VE TÜREV

Terimler ve Kavramlar

- **Anlık değişim oranı**
- **Teğetin eğimi**
- **Türev**
- **Sağdan türev**
- **Soldan türev**

Ortalama Değişim Oranı



“Geleceğe nefes, dünyaya nefes” sloganı ile yola çıkan bir sivil toplum kuruluşu, ağaç dikme kampanyası düzenlemiştir.

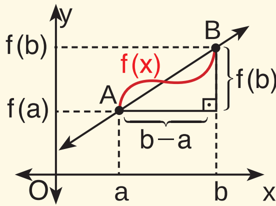
Yandaki grafikte bu kampanya kapsamında dikilen bir ağacın yıllara göre boyundaki değişim miktarı görülmektedir. Bu ağacın 5. yılından 35. yılına kadar boyundaki ortalama değişim oranı, A ve E noktalarını birleştiren doğrunun eğimi olup $m = \frac{7-2}{35-5} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ bulunur.

Buna göre

a) 5. yılından 10. yılına kadar ağacın boyunun ortalama değişim oranını bulabilir misiniz?

b) A ve B noktalarından geçen doğrunun eğimini bulabilir misiniz?

Bilgi



$f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $x = a$ ve $x = b$ arasında f fonksiyonunun **ortalama değişim oranı** $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ olur.

1. ÖRNEK

$f:[-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x^2 - x + 2$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun $[-2, 2]$ ndaki ortalama değişim oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun $[-2, 2]$ ndaki ortalama değişim oranı

$$\frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{(2^2 - 2 + 2) - ((-2)^2 - (-2) + 2)}{4} = \frac{4 - 8}{4} = -1 \text{ olur.}$$

Anlık Değişim Oranı

X konum (metre)

$X(a+h)$

$X(a)$

$X(t)$

O a a + h t zaman (saniye)

Yandaki grafikte doğrusal olarak hareket eden bir hareketliye ait konum-zaman grafiği verilmiştir. $X(t)$ fonksiyonu için $h > 0$ olmak üzere $[a, a+h]$ nda ortalama değişim oranı $\dfrac{X(a+h)-X(a)}{h}$ olur. Buradan $h \to 0$ için limit alınırsa $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{X(a+h)-X(a)}{h}$ limitine $X(t)$ fonksiyonunun $(a, X(a))$ noktasındaki anlık değişim oranı denir.

$h \to 0$ için $(a, X(a))$ noktasında $X(t)$ fonksiyonunun grafiğine teğet olan doğru elde edilir.

Bilgi

$X(t)$ fonksiyonu için anlık değişim oranı $(a, X(a))$ noktasındaki teğetin eğimidir ve
$m_T = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{X(a+h)-X(a)}{h}$ bulunur.

2. ÖRNEK

$f(x) = x^2 + x + 3$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki anlık değişim oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki anlık değişim oranı

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2+(1+h)+3-(1^2+1+3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2+1+h-2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+3h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(h+3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(h+3) = 3 \text{ bulunur.}$$

Ders İçi Uygulama 21 — Bireysel Çalışma

$f:[-2,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x - 1$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun $[-2, 3]$ ndaki ortalama değişim oranını bulunuz.

Ders İçi Uygulama 22 — Bireysel Çalışma

$f:[-2,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x - 1$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki anlık değişim oranını bulunuz.

Türev

Bilgi

$f:[a, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in (a, b)$ olsun. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ varsa bu limite **f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi** denir ve $f'(x_0)$ veya $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ ile gösterilir. $\dfrac{d}{dx}$ ifadesine **türev operatörü** denir.

Bir f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki teğetinin eğimi m_T olmak üzere f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevi o noktadaki teğetinin eğimine eşittir. Buradan $m_T = f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ olur.

Bu limitte $x - x_0 = h$ dönüşümü yapılırsa $x = x_0 + h$ bulunur ve $x \to x_0$ iken $h \to 0$ olur. Buradan $m_T = f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ elde edilir.

3. ÖRNEK

$f(x) = x^2 + 3x - 1$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki teğetinin eğimi

$$m_T = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 1 - (2^2 + 3 \cdot 2 - 1)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x - 2)}(x + 5)}{\cancel{x - 2}} = \lim_{x \to 2} (x + 5) = 7 \text{ olur.}$$

Ders İçi Uygulama 23 — Bireysel Çalışma

Aşağıdaki fonksiyonların $x = 1$ noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 2$

b) $f(x) = x^3 - 1$

Sağdan ve Soldan Türev

Bilgi

$f:[a, b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ ve f fonksiyonu $x = x_0$ noktasında sürekli olsun.

$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ varsa bu limit değerine **f fonksiyonunun** x_0 **apsisli noktadaki soldan türevi** denir

ve $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0^-)$ biçiminde gösterilir.

$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ varsa bu limit değerine **f fonksiyonunun** x_0 **apsisli noktadaki sağdan türevi** denir

ve $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0^+)$ biçiminde gösterilir.

$\ell \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = \ell$ ise **f fonksiyonunun** $x = x_0$ **noktasında türevi vardır** denir ve $f'(x_0) = \ell$ olur. $f'(x_0^-) \neq f'(x_0^+)$ ise **f fonksiyonunun** $x = x_0$ **noktasında türevi yoktur** denir.

4. ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$ kuralı ile verilen f fonksiyonu için aşağıdaki değerleri hesaplayınız.

a) $f'(1^-)$ **b)** $f'(1^+)$ **c)** $f'(2)$

ÇÖZÜM

a) $f'(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 + x - (1^2 + 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\cancel{(x - 1)}(x + 2)}{\cancel{x - 1}} = \lim\limits_{x \to 1^-} (x + 2) = 3$

b) $f'(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 + x - (1^2 + 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\cancel{(x - 1)}(x + 2)}{\cancel{x - 1}} = \lim\limits_{x \to 1^-} (x + 2) = 3$

c) $f'(2^+) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 + x - (2^2 + 2)}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\cancel{(x - 2)}(x + 3)}{\cancel{x - 2}} = \lim\limits_{x \to 2^+} (x + 3) = 5$

$f'(2^-) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 + x - (2^2 + 2)}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\cancel{(x - 2)}(x + 3)}{\cancel{x - 2}} = \lim\limits_{x \to 2^-} (x + 3) = 5$ olur.

$f'(2^+) = f'(2^-) = 5$ olduğundan $f'(2) = 5$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 24 — Bireysel Çalışma

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 5$ kuralı ile verilen f fonksiyonu için aşağıdaki değerleri hesaplayınız.

a) $f'(-1^-)$ **b)** $f'(-1^+)$ **c)** $f'(3)$ **ç)** $f'(0)$

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$ olduğuna göre $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x) - f^2(2)}{x - 2}$ değerini bulunuz.

Bilgi

f fonksiyonu (a, b) nda türevli bir fonksiyon olmak üzere $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi $f'(x)$, $\dfrac{df(x)}{dx}$ veya $\dfrac{dy}{dx}$ ile gösterilir. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ olur.

5. ÖRNEK

Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların tanımlı olduğu aralıkta türevlerini bulunuz.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 1$ **b)** $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 5$

ÇÖZÜM

a) $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{4\cdot(x+h) + 1 - (4x+1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4x + 4h + 1 - 4x - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4\cdot \cancel{h}}{\cancel{h}} = 4 \text{ bulunur.}$$

b) $$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 + 5 - (x^2+5)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2 + 2xh + h^2 + 5 - x^2 - 5}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot(2x+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x \text{ bulunur.}$$

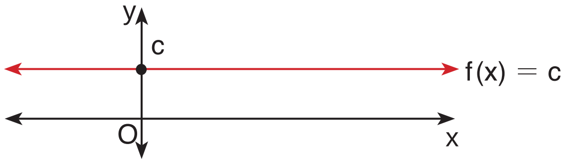
Ders İçi Uygulama 25 — Bireysel Çalışma

Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların tanımlı olduğu aralıklardaki türevlerini bulunuz.

a) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x + 1$ **b)** $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 5x - 4$ **c)** $f:[0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$

Türev Alma Kuralları

Sabit Fonksiyonun Türevi



$f(x) = c$ sabit fonksiyonu x eksenine paralel bir doğru olduğu için her noktada fonksiyona çizilen teğetlerin eğimi 0 olur. Buradan $m_T = \dfrac{df(x)}{dx} = 0$ elde edilir.

Bilgi

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = c$ ise

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{c - c}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 0 = 0$ bulunur.

Örneğin $f(x) = 2 \Rightarrow f'(x) = 0,\ f(x) = -\dfrac{3}{4} \Rightarrow f'(x) = 0$ olur.

Ders İçi Uygulama 26 — Bireysel Çalışma

1. Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların tanımlı olduğu aralıkta türevlerini bulunuz.

a) $f(x) = -\dfrac{3}{7}$ **b)** $f(x) = 4\pi^2$ **c)** $f(x) = 6!$

2. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (m+1) \cdot x^2 - (n-3) \cdot x + m + n - 5$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun her x noktasında türevi 0 ise $m + n$ değerini bulunuz.

$f(x) = a \cdot x^n$ Fonksiyonunun Türevi

Bilgi

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = a \cdot x^n$ ise $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$ olur.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a \cdot (x+h)^n - a \cdot x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[a \cdot \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[a \cdot \frac{(x+h-x)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2} \cdot x + (x+h)^{n-3} \cdot x^2 + \ldots + x^{n-1}]}{h} \right]$$

$$= a \cdot \underbrace{(x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1})}_{n \text{ tane}} = a \cdot n \cdot x^{n-1} \text{ olur.}$$

6. ÖRNEK

Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların tanımlı olduğu aralıkta türevlerini bulunuz.

a) $f(x) = 7x^3$ **b)** $f(x) = -\dfrac{3}{x^5}$ **c)** $f(x) = 2\sqrt{x}$

ÇÖZÜM

a) $f(x) = 7x^3 \Rightarrow f'(x) = 7 \cdot 3 \cdot x^{3-1} = 21 \cdot x^2$ olur.

b) $f(x) = -\dfrac{3}{x^5} = -3 \cdot x^{-5} \Rightarrow f'(x) = (-3) \cdot (-5) \cdot x^{-5-1} = 15 \cdot x^{-6}$ olur.

c) $f(x) = 2\sqrt{x} = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ olur.

7. ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2a+1) \cdot x^5$ kuralı ile verilen f fonksiyonunda $f'(1) = 25$ ise $f'(a)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = (2a+1) \cdot x^5 \Rightarrow f'(x) = (2a+1) \cdot 5 \cdot x^4$ olur.
$f'(1) = 25$ olduğundan $f'(1) = (2a+1) \cdot 5 \cdot 1^4 = 25 \Rightarrow 5 \cdot (2a+1) = 25 \Rightarrow a = 2$ bulunur.
$f'(a) = f'(2) = (2 \cdot 2 + 1) \cdot 5 \cdot 2^4 = 400$ olur.

Bilgi

Bir f fonksiyonunun birinci mertebeden türevi $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$ olmak üzere f fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi $f''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df(x)}{dx}\right) = \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$ biçiminde gösterilir.

8. ÖRNEK

Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların tanımlı olduğu aralıkta ikinci mertebeden türevlerini bulunuz.

a) $f(x) = \frac{7}{x^3}$

b) $f(x) = 5\sqrt{x}$

ÇÖZÜM

a) $f(x) = \frac{7}{x^3} = 7 \cdot x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -21 \cdot x^{-4}$ ve $f''(x) = (-21) \cdot (-4)x^{-5} = 84x^{-5}$ bulunur.

b) $f(x) = 5\sqrt{x} = 5 \cdot x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ ve $f''(x) = \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{5}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 27

Bireysel Çalışma

1. Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların tanımlı olduğu aralıkta türevlerini bulunuz.

a) $f(x) = \frac{5x^7}{7}$

b) $f(x) = \frac{2}{3x^6}$

c) $f(x) = \frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

2. $f(x) = 9 \cdot \sqrt[3]{x}$ ise $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ değerini bulunuz.

Michel Rolle (1652-1719)

Bir Fransız ilkokul öğretmeni olan Michel Rolle (Mişel Rol), çok iyi bir eğitim almamış olmasına rağmen çeşitli teoremleri çözmüştür. Garip bir şekilde teoremi Rolle ispatlamadığı hâlde teorem onun adını taşımaktadır. Aynı zamanda Roll, bir x sayısının n. dereceden kökünü temsil etmede kullandığımız $\sqrt[n]{x}$ sembolünü ilk kullanan kişi olarak da bilinmektedir.

Calculus Cilt 1

(*) Metin, yazıldığı dönemin yazım ve noktalama kurallarına sadık kalınarak alınmıştır.

Bir Fonksiyonun Bir Noktada ve Bir Aralıkta Türevlenebilirliği

Bilgi

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun. f fonksiyonu $x = x_0$ apsisli noktada türevli ise bu noktada süreklidir. Bu durumda f fonksiyonu $x = a$ apsisli noktada sürekli değil ise fonksiyonun bu noktada türevi yoktur. Sonuç olarak f fonksiyonu $x = x_0$ apsisli noktada türevli ise

I. f fonksiyonu $x = x_0$ noktasında süreklidir.

II. $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$ olur.

9. ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1 \text{ ise} \\ x^3, & x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

kuralı ile verilen f fonksiyonuna göre aşağıdaki değerleri hesaplayınız.

a) $f'(-2)$ **b)** $f'(3)$ **c)** $f'(1)$

ÇÖZÜM

a) f fonksiyonu $x \leq 1$ iken $f(x) = x^3$ biçiminde sürekli bir fonksiyondur. Buradan
$f'(x) = 3\cdot x^2 \Rightarrow f'(-2^-) = f'(-2^+) = 3\cdot(-2)^2 = 12$ olduğundan $f'(-2) = 12$ bulunur.

b) f fonksiyonu $x > 1$ iken $f(x) = x^2$ biçiminde sürekli bir fonksiyondur. Buradan
$f'(x) = 2\cdot x \Rightarrow f'(3^-) = f'(3^+) = 2\cdot 3 = 6$ olduğundan $f'(3) = 6$ bulunur.

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} x^2 = \lim\limits_{x\to 1^-} x^3 = f(1) = 1$ olduğundan f fonksiyonu $x = 1$ apsisli noktada süreklidir.
$x \leq 1$ iken $f(x) = x^3$ ve $f'(x) = 3\cdot x^2 \Rightarrow f'(1^-) = 3$ olur.
$x > 1$ iken $f(x) = x^2$ ve $f'(x) = 2\cdot x \Rightarrow f'(1^+) = 2$ olur.

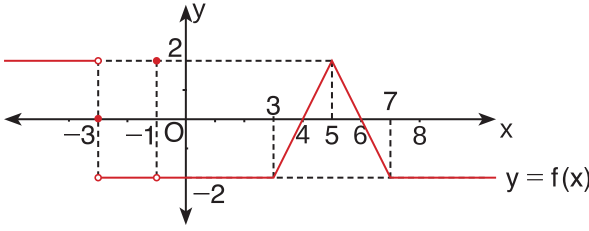
Buradan $f'(1^-) \neq f'(1^+)$ olduğundan $f'(1)$ yoktur.

Ders İçi Uygulama 28 — Bireysel Çalışma

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & x \geq 4 \text{ ise} \\ \dfrac{x^3}{16}, & x < 4 \text{ ise} \end{cases}$$

kuralı ile verilen f fonksiyonuna göre $f'(1)$, $f'(9)$ ve $f'(4)$ değerlerini varsa bulunuz.

10. ÖRNEK

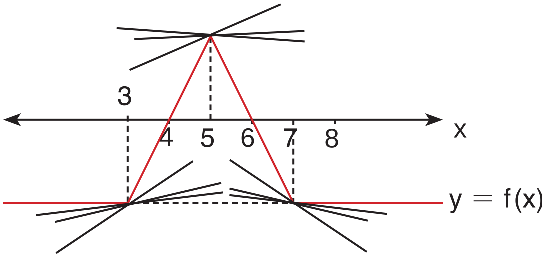


Yanda verilen grafiğe göre f fonksiyonunun hangi noktalarda türevinin olmadığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = 2$ ve $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -2$ olur. Buradan $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ olduğundan $x = -3$ noktasında f fonksiyonu sürekli değildir. Bu noktada fonksiyonun türevi yoktur.

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -2$ ve $f(-1) = 2$ olur. Buradan $\lim\limits_{x \to -1} f(x) \neq f(-1)$ olduğundan $x = -1$ noktasında f fonksiyonu sürekli değildir. Bu noktada fonksiyonun türevi yoktur.



$x = 3$, $x = 5$ ve $x = 7$ noktaları grafiğin kırılma noktalarıdır. Kırılma noktalarında fonksiyonun soldan türevi sağdan türevine eşit olmadığından (o noktada fonksiyona birden fazla teğet çizilebildiğinden) bu noktalarda f fonksiyonu sürekli olsa da fonksiyonun türevi yoktur. Bir fonksiyon bir noktada sürekli olduğu hâlde fonksiyonun o noktada türevi olmayabilir.

Bilgi

$f:[a, b] \to \mathbb{R}$ ve $\forall x \in (a, b)$ için f fonksiyonunun türevi varsa **f fonksiyonu** (a, b) **nda türevlidir** denir.

11. ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & x > 2 \text{ ise} \\ bx + 1, & x \leq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

kuralı ile verilen f fonksiyonuna göre her $x \in \mathbb{R}$ için türevli ise a ve b değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Fonksiyonun türevli olabilmesi için öncelikle sürekli olması gerekir. f fonksiyonu her noktada sürekli olduğundan $x = 2$ noktasında da sürekli olmalıdır.

Buradan

$$\lim_{x \to 2^+}(ax^2) = \lim_{x \to 2^-}(bx + 1) = f(2)$$

$$a \cdot 2^2 = b \cdot 2 + 1$$

$$4a = 2b + 1 \text{ olur.} \quad \text{(I)}$$

Buradan f fonksiyonunun türevli olabilmesi için her noktada fonksiyonun sağdan türevinin soldan türevine eşit olması gerekir. Bu durumda $x = 2$ kritik noktası için $f'(2^+) = f'(2^-)$ olmalıdır.

$x > 2$ iken $f(x) = a \cdot x^2 \Rightarrow f'(x) = a \cdot 2 \cdot x$ ve $f'(2^+) = 4a$ olur.

$x \leq 2$ iken

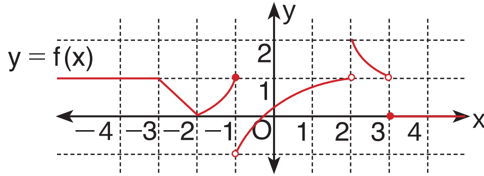
$f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{bx + 1 - (2b + 1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{bx - 2b}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{b(x - 2)}{x - 2} = b$ olur.

$f'(2^+) = f'(2^-)$ olduğundan $4a = b$ bulunur. (II)

(I) ve (II) nin ortak çözümünden $b = -1$ ve $a = -\frac{1}{4}$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 29 — Bireysel Çalışma

1.



Yanda verilen grafiğe göre f fonksiyonunun hangi noktalarda türevinin olmadığını bulunuz.

2. $f(x) = \begin{cases} ax^2, & x > 1 \\ px - 1, & x \leq 1 \end{cases}$

kuralı ile verilen f fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktada türevli olması için $a + p$ değerini bulunuz.

Türevlenebilen İki Fonksiyonun Toplamının, Farkının, Çarpımının ve Bölümünün Türevi

Bilgi

f ve g, $A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \to \mathbb{R}$, $g: A \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı ve her $x \in A$ apsisli noktada türevlenebilen fonksiyonlar ise $f \pm g$ fonksiyonu da her $x \in A$ noktasında türevlenebilir ve $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$ olur. Ayrıca $a, b \in \mathbb{R}$ için $[a \cdot f(x) \pm b \cdot g(x)]' = a \cdot f'(x) \pm b \cdot g'(x)$ bulunur.

12. ÖRNEK

Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların tanımlı olduğu aralıkta türevini bulunuz.

a) $f(x) = 3x^4 + 5x^3 - 2x + 9$

b) $g(x) = 3\sqrt{x} - \frac{2}{x^4}$

ÇÖZÜM

a) $f'(x) = 3 \cdot 4 \cdot x^3 + 5 \cdot 3 \cdot x^2 - 2 \cdot 1 = 12x^3 + 15x^2 - 2$ bulunur.

b) $g(x) = 3\sqrt{x} - \frac{2}{x^4} = 3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-4} \Rightarrow g'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} - 2 \cdot (-4) \cdot x^{-5} = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{8}{x^5}$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 30 — Bireysel Çalışma

1. Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların tanımlı olduğu aralıkta türevini bulunuz.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 5$

b) $f(x) = 3x^2 + 2\sqrt{x}$

2. $f(x) = \begin{cases} x^3 - ax + 2, & x > 1 \text{ ise} \\ bx^2 + x + 1, & x \le 1 \text{ ise} \end{cases}$

kuralı ile verilen f fonksiyonuna göre her $x \in \mathbb{R}$ için türevli ise a ve b değerlerini bulunuz.

3. $f(x) = \frac{d}{dx}\left(2x^3 - 6\sqrt[3]{x} + \frac{d^2}{dx^2}(x^4 - 5x + 1)\right)$ kuralı ile verilen f fonksiyonuna göre $f(1)$ değerini bulunuz.

Bilgi

f ve g, $A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \to \mathbb{R}$, $g: A \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı ve her $x \in A$ apsisli noktada türevlenebilen fonksiyonlar ise $f \cdot g$ fonksiyonu da x noktasında türevlenebilir ve
$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$ olur.

13. ÖRNEK

Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların tanımlı olduğu aralıkta türevini bulunuz.

a) $f(x) = (x^3 - 2x + 4) \cdot (x^5 + 2x^4 - 5x^2 + 3)$

b) $g(x) = (2 \cdot \sqrt[3]{x} - x + 4) \cdot \left(3\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} - 1\right)$

ÇÖZÜM

a) $f'(x) = (3x^2 - 2)(x^5 + 2x^4 - 5x^2 + 3) + (5x^4 + 8x^3 - 10x)(x^3 - 2x + 4)$ bulunur.

b) $g(x) = (2x^{\frac{1}{3}} - x + 4) \cdot (3x^{\frac{1}{2}} - x^{-2} - 1)$ olduğundan

$g'(x) = \left(\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 1\right)(3x^{\frac{1}{2}} - x^{-2} - 1) + \left(\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{-3}\right)(2x^{\frac{1}{3}} - x + 4)$ bulunur.

Bilgi

f ve g $A \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, her $x \in A$ apsisli noktada türevlenebilen fonksiyonlar ve $g(x) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da her $x \in A$ apsisli noktada türevlidir ve $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$ olur.

14. ÖRNEK

Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların tanımlı olduğu aralıkta türevini bulunuz.

a) $f(x) = \frac{x-3}{x^2+1}$

b) $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

ÇÖZÜM

a) $f'(x) = \frac{(x-3)' \cdot (x^2+1) - (x^2+1)' \cdot (x-3)}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{1 \cdot (x^2+1) - 2x \cdot (x-3)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2+6x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+6x+1}{(x^2+1)^2}$ bulunur.

b) $g'(x) = \frac{(\sqrt{x})' \cdot (\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}+1)' \cdot (\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+1)^2}$

$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x}+1) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2}$

$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x}+1-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+1)^2}$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 31 — Bireysel Çalışma

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot \ldots \cdot (x-100)$ kuralı ile verilen f fonksiyonuna göre $f'(50)$ değerini bulunuz.

2. $f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{d}{dx}(x^2+3)}{2x^4+1}\right)$ kuralı ile verilen f fonksiyonuna göre $f(-1)$ değerini bulunuz.

İki Fonksiyonun Bileşkesinin Türevi

Bilgi

f fonksiyonu x noktasında türevli, g fonksiyonu $f(x)$ apsisli noktada türevli fonksiyonlar olmak üzere gof fonksiyonu x noktasında türevlidir ve $(gof)'(x) = g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ olur.

Ayrıca $y = f(t)$ ve $t = g(x)$ olmak üzere $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ biçiminde verilen kurala **zincir kuralı** denir.

15. ÖRNEK

$f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ ve $g(x) = 4x - 3$ kuralı ile verilen f fonksiyonuna göre $(fog)'(3)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ olduğundan $(fog)'(3) = f'(g(3)) \cdot g'(3)$ olur.

Buradan
$g'(x) = 4 \Rightarrow g'(3) = 4$ ve $g(3) = 4 \cdot 3 - 3 = 9$
$f'(x) = 6x + 2 \Rightarrow f'(9) = 6 \cdot 9 + 2 = 56$ olur.

Bulunan değerler yerine yazılırsa
$(fog)'(3) = f'\Big(\underbrace{g(3)}_{9}\Big) \cdot \underbrace{g'(3)}_{4} = \underbrace{f'(9)}_{56} \cdot 4 = 56 \cdot 4 = 224$ bulunur.

16. ÖRNEK

$x \in \mathbb{R}^+$ ve $f(3x^2 + 2) = 2x^2 + x + 1$ kuralı ile verilen f fonksiyonuna göre $f'(14)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa $(f(3x^2 + 2))' = (2x^2 + x + 1)' \Rightarrow f'(3x^2 + 2) \cdot (6x) = 4x + 1$ olur.

$x = 2$ için $f'(3 \cdot 2^2 + 2) \cdot (6 \cdot 2) = 4 \cdot 2 + 1 \Rightarrow f'(14) \cdot 12 = 9 \Rightarrow f'(14) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ bulunur.

17. ÖRNEK

Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların tanımlı olduğu aralıkta türevini bulunuz.

a) $f(x) = (x^4 + 3x^2 - 1)^5$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$

ÇÖZÜM

a) $y = (x^4 + 3x^2 - 1)^5$ fonksiyonu için $t(x) = x^4 + 3x^2 - 1$ dönüşümü yapılırsa $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ zincir kuralı uygulandığında $y' = (t^5)' = 5 \cdot t^4 \cdot t'$ olur. Buradan $f'(x) = 5 \cdot (x^4 + 3x^2 - 1)^4 \cdot (4x^3 + 6x)$ bulunur.

b) $y = \sqrt{x^2 + 3x}$ fonksiyonu için $t = x^2 + 3x$ dönüşümü yapılırsa $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ zincir kuralı uygulandığında $y' = (\sqrt{t})' = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot t'$ olur. Buradan $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3x}} \cdot (2x + 3)$ bulunur.

18. ÖRNEK

$y = 3t^2 - 5t - 4$
$t = x^2 + x$

biçiminde verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıkta $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $x = 1$ için değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Zincir kuralı uygulanırsa $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d(3t^2 - 5t - 4)}{dt} \cdot \frac{d(x^2 + x)}{dx} = (6t - 5) \cdot (2x + 1)$ olur.

Buradan $x = 1$ için $t = 1^2 + 1 \Rightarrow t = 2$ olduğundan
$(6t - 5) \cdot (2x + 1) = (6 \cdot 2 - 5) \cdot (2 \cdot 1 + 1) = 21$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 32 — Bireysel Çalışma

1. $f(x) = 2x^3 + x^2 - x$ ve $g(x) = x^2 + 1$ olduğuna göre $(gof)'(1)$ değerini bulunuz.

2. $f^{-1}(x^4 - 5x^3 + 5x - 2) = x^3 - 1$ ise $f'(0)$ değerini bulunuz.

3. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}\right)$ ifadesinin $x = 3$ için değerini bulunuz.

4. $f(x) = \frac{d}{dx}\left((x^3 - 4x^2 + 5)^3\right)$ ise $f'(1)$ değerini bulunuz.

5. $y = \sqrt{t^2 + 3t}$
$t = x^3 - 2x - 3$
biçiminde verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıkta $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $x = 2$ için değerini bulunuz.

19. ÖRNEK

Yandaki görselde suya atılan bir taşın oluşturduğu dalgalar sonucunda oluşan daireler verilmiştir. Dalgaların oluşturduğu dairelerin yarıçap uzunluğu 20 m/dk. sabit hızla artmaktadır.

Buna göre ilk oluşan dairenin yarıçap uzunluğu 5 m olduğu anda dairenin alanının değişim hızını bulunuz.

ÇÖZÜM

Dairenin zamana bağlı yarıçap uzunluğu $r(t)$, yarıçap uzunluğunun zamana bağlı değişim hızı $\frac{dr}{dt}$, alanı $A = \pi \cdot r^2$ ve alanının değişim hızı $\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$ olur.

Buradan $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi \cdot 5 \cdot 20 = 200\pi \ m^2/dk.$ bulunur.

20. ÖRNEK

Yandaki şekilde oluşturulmuş dikdörtgen üzerindeki hidrolik kollardan A nın boyu 5 cm/sn. hızla azalırken B nin boyu 4 cm/sn. hızla artmaktadır.

Buna göre $|OE| = 3$ cm ve $|OD| = 4$ cm olduğu anda DE köşegeninin uzunluğunun değişim hızını bulunuz.

ÇÖZÜM

DE köşegeninin uzunluğu c(t) olmak üzere $c^2 = a^2 + b^2$ bağıntısı vardır. Buradan $c^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow c = 5$ olur.

DE köşegeninin değişim hızı $\frac{dc}{dt} = c'$ olmak üzere

$$\frac{d}{dt}(c^2) = \frac{d}{dt}(a^2 + b^2)$$

$$\not{2}c\frac{dc}{dt} = \not{2}a\frac{da}{dt} + \not{2}b\frac{db}{dt}$$

$$c\frac{dc}{dt} = a\frac{da}{dt} + b\frac{db}{dt}$$

$$5c' = 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 4$$

$$5c' = 1 \Rightarrow c' = \frac{1}{5} \text{ cm/sn. bulunur.}$$

Ders İçi Uygulama 33 — Bireysel Çalışma

Küre şeklindeki bir top hava kaçırırken topun yarıçap uzunluğu 3 cm/sn. hızla azalmaktadır. Topun yarıçap uzunluğu 10 cm olduğunda hacminin değişim hızını bulunuz.

ALIŞTIRMALAR 5.4

1. $f'(x) = 4x^3 + 2x - 1$
$f(-1) = 2$
kuralı ile verilen f fonksiyonuna göre $\lim_{x \to -1} \dfrac{f(x) - 2}{x + 1}$ **değerini bulunuz.**

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 1$ **kuralı ile verilen f fonksiyonunun** $x = \dfrac{1}{3}$ **noktasındaki türevini türev tanımını kullanarak bulunuz.**

3. Aşağıdaki kuralları verilen fonksiyonların tanımlı olduğu aralıklardaki türevini bulunuz.

a) $n(x) = \dfrac{9}{\sqrt[3]{x}}$

b) $r(x) = x\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

c) $h(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$

ç) $k(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 1)^3}$

4. $f(x) = 3x^2 - 1$ **kuralı ile verilen f fonksiyonunda** $f'(m) = 24$ **olduğuna göre m değerini bulunuz.**

5. $f(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ **kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğine** $x = 1$ **apsisli noktasından çizilen teğetinin eğimini bulunuz.**

6. $f(x) = mx^2 + 1$ **ve** $g(x) = x^3 + nx^2 - x$ **kuralları ile verilen f ve g fonksiyonlarının grafiklerine** $x = -1$ **apsisli noktadan çizilen teğetlerin eğimleri eşit olduğuna göre** $m - n$ **değerini bulunuz.**

7. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 1 \\ x^3 - x, & x \geq 1 \end{cases}$

biçiminde tanımlı f fonksiyonunun $x = -1$, $x = 1$ **ve** $x = 3$ **noktalarındaki türevlerini varsa bulunuz.**

8. $\lim_{x \to 3} \dfrac{f(3) - f(x)}{x - 3} = -5$ **ve** $f(x) = ax^2 - x$ **olduğuna göre** $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ **değerini bulunuz.**

9. $f(x) = \dfrac{x^2}{2\sqrt{x}}$ **kuralı ile verilen f fonksiyonuna göre** $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

10. $f(x) > 0$ **olmak üzere** $f^2(3x + 1) = 2x^2 - 4x + 9$ **olduğuna göre** $f'(1)$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

11. $y = t^2 - 2t$, $t = \sqrt{x} + 1$ **olduğuna göre** $\dfrac{dy}{dx}$ **ifadesinin** $x = 4$ **için değerini bulunuz.**

12. $y = t^3 - 1$ ve $x = t^2 + 1$ **olduğuna göre** $\dfrac{dy}{dx}$ **ifadesinin eşitini x türünden bulunuz.**

13. $f(x) = x^2 - 1$ **ve** $g(x) = 3x + 1$ **kuralları ile verilen fonksiyonlara göre**

a) $(fog)'(x)$ **ifadesinin eşitini bulunuz.**
b) $(gof)'(2)$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

14. Doğrusal olarak hareket eden bir hareketlinin; zamana bağlı konumu $X(t)$, anlık hızı $V(t)$ ve anlık ivmesi $A(t)$ olmak üzere $X'(t) = V(t)$ ve $V'(t) = A(t)$ olarak bulunur.

Zamana göre konumu $X(t) = 3t^2 + 1$ **fonksiyonu ile verilen hareketlinin**

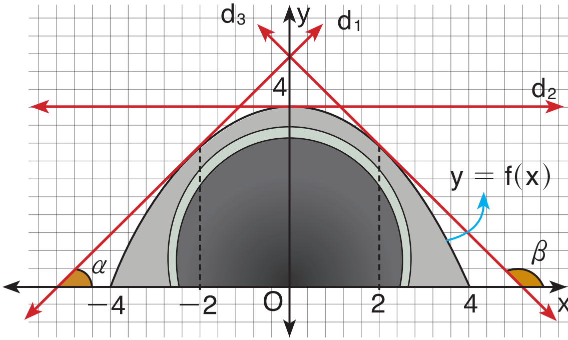
a) 1 ve 3. saniyeler arasındaki ortalama hızını bulunuz.
b) 4. saniyedeki anlık hızını (anlık değişim oranı) bulunuz.

5.3. TÜREVİN UYGULAMALARI

Terimler ve Kavramlar

- **Kritik nokta**
- **Ekstremum nokta**
- **Mutlak maksimum ve mutlak minimum**
- **Yerel maksimum ve yerel minimum**

Bir Fonksiyonun Artan veya Azalan Olduğu Aralıklar

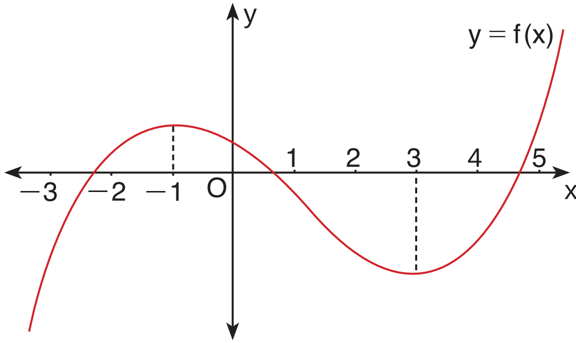


Görsel 5.5: Tünel çizimi

Yanda parabolik biçimde bir tünele ait mimari çizim verilmiştir. Bu çizimde tünele $x = -2$, $x = 0$ ve $x = 2$ apsisli noktalardan d_1, d_2 ve d_3 teğetleri çizilmiştir. d_1 doğrusunun eğimi m_1 ve eğim açısı $0 < \alpha < 90°$ olduğundan $m_1 = \tan\alpha = f'(-2) > 0$ olur. d_2 doğrusunun eğimi $m_2 = \tan 0 = f'(0) = 0$ olur. d_3 doğrusunun eğimi m_3 ve eğim açısı $90° < \beta < 180°$ olduğundan $m_3 = \tan\beta = f'(2) < 0$ olur.

Ders İçi Uygulama 34

Bireysel Çalışma



Yanda grafiği verilen

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 2$

kuralı ile verilen f fonksiyonuna

$x = -2$, $x = -1$, $x = 2$, $x = 3$, ve $x = 4$

apsisli noktalarından çizilen teğetlerini grafik üzerinde gösteriniz. Bu noktalardan geçen teğetlerin eğimlerini bulunuz ve eğimlerin işaretlerini inceleyiniz.

Bilgi

f fonksiyonu $[a, b]$ nda sürekli ve (a, b) nın her noktasında türevli olsun. Her $x \in (a, b)$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]$ nda artandır, $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]$ nda azalandır. Fonksiyonun artan veya azalan olduğu aralıkları incelemek için türevinin işaret tablosu yapılır.

1. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonu bütün gerçek sayılarda sürekli ve her noktada türevli bir fonksiyondur.
Bu durumda $f'(x) > 0$ ise f artan, $f'(x) < 0$ ise f azalandır. f' fonksiyonunun işaret tablosu yapılırsa $f'(x) = 3x^2 - 12x \Rightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ ve $x_2 = 4$ olur. Buradan

x	$-\infty$	0		4		$+\infty$
f′(x)	+	o	–	o	+	
f(x)	Artan ↗		Azalan ↘		Artan ↗	

f fonksiyonunun artan olduğu aralık $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$ ve azalan olduğu aralık $[0, 4]$ bulunur.

2. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - ax^2 + 3x + 1$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun daima artan bir fonksiyon olması için a nın değer aralığını bulunuz.

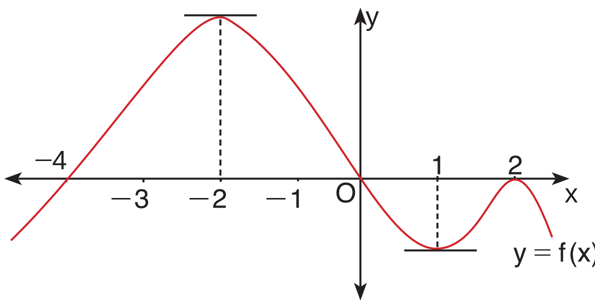
ÇÖZÜM

f fonksiyonu daima artan bir fonksiyon olduğundan her x gerçek sayısı için $f'(x) > 0$ olmalıdır.
$f'(x) = 3x^2 - 2ax + 3 > 0$ ise $\Delta \leq 0$ olmalıdır.
$\Delta = (-2a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 \leq 0 \Rightarrow 4a^2 - 36 \leq 0 \Rightarrow a^2 - 9 \leq 0$ olur. Eşitsizliğin işaret tablosu yapılırsa

a	$-\infty$	-3		3		$+\infty$
$a^2 - 9 \leq 0$	+	•	–	•	+	
			Çözüm			

a nın değer aralığı $[-3, 3]$ bulunur.

3. ÖRNEK



Yandaki grafikte verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıklarda türevinin işaretini inceleyiniz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun artan olduğu aralıklarda fonksiyonun türevi pozitif ve f fonksiyonunun azalan olduğu aralıklarda fonksiyonun türevi negatiftir. Buradan

x	$-\infty$	-2		1		2		$+\infty$
f(x)	Artan ↗		Azalan ↘		Artan ↗		Azalan ↘	
f′(x)	+	o	–	o	+	o	–	

elde edilir.

4. ÖRNEK

Yanda f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.

Buna göre f fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.

ÇÖZÜM

Grafikten f′ fonksiyonunun kökleri $x_1 = -4$, $x_2 = -1$ ve $x_3 = x_4 = 3$ tür. Buna göre f′ fonksiyonunun işaret tablosu yapılırsa

x	$-\infty$		-4		-1		3		$+\infty$
f′ (x)		+	0	−	0	+	0 0	+	
f (x)		Artan		Azalan		Artan		Artan	

olur. Buradan f fonksiyonu $[-4, -1]$ nda azalan ve $(-\infty, -4] \cup [-1, \infty)$ nda artandır.

Ders İçi Uygulama 35 — Bireysel Çalışma

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 1$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 - mx - 1$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun daima azalan bir fonksiyon olması için m nin değer aralığını bulunuz.

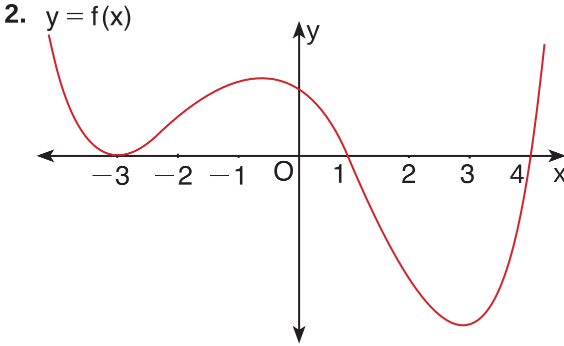
3. $f(x) = x^2 - mx + 7$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun azalan olduğu en geniş aralık $(-\infty, 4]$ olduğuna göre m nin en küçük tam sayı değerini bulunuz.

1. f fonksiyonu $(0,\ 5)$ nda pozitif değerli ve azalan bir fonksiyondur.

Buna göre aşağıdaki fonksiyonlardan hangilerinin aynı aralıkta daima azalan bir fonksiyon olduğunu bulunuz.

a) $x^2 \cdot f(x)$ **b)** $\frac{f(x)}{x}$ **c)** $f^3(x)$

2. $y = f(x)$



Yukarıda verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre aşağıdakilerden hangilerinin doğru olduğunu bulunuz.

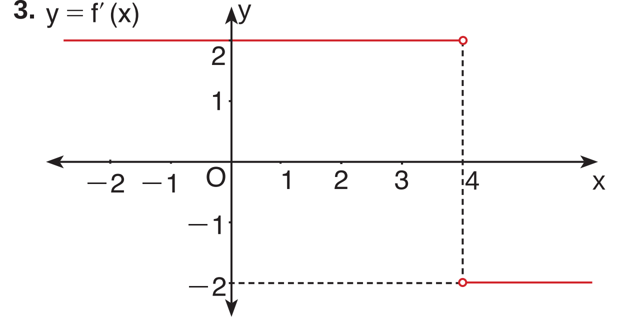
a) $f'(-4) < 0$

b) $f'(-3) = 0$

c) $f'(-1) \cdot f'(1) < 0$

ç) $f'(1) \cdot f'(2) > 0$

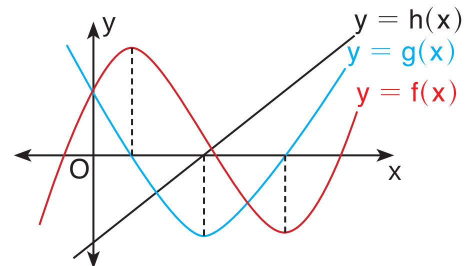
3. $y = f'(x)$



Yukarıda verilen $y = f'(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre f fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.

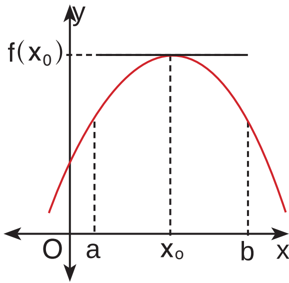
4. Bir cismin zamana bağlı konumu $X(t)$ olmak üzere cismin t. saniyedeki hızı $V(t) = \frac{dX(t)}{dt}$ ve ivmesi $a(t) = \frac{d^2X(t)}{dt^2}$ dir.

Buna göre aşağıdaki grafikleri cismin konumu, hızı ve ivmesi ile eşleştiriniz.

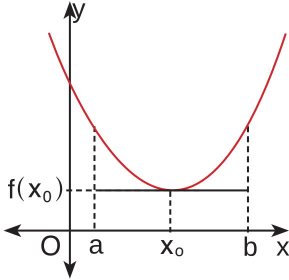


Bir Fonksiyonun Mutlak Maksimum, Mutlak Minimum; Yerel Maksimum, Yerel Minimum Noktaları

$x_0 \in (a, b)$ olmak üzere $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin.
$f'(x_0) = 0$ veya $f'(x_0)$ yoksa x_0 apsisli noktaya **f fonksiyonunun kritik noktası** denir.



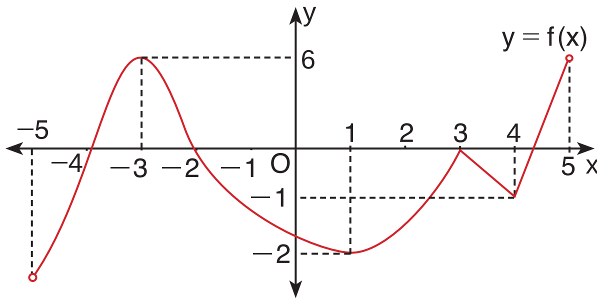
f fonksiyonu (a, b) nda en büyük değerini x_0 apsisli noktada alıyorsa $(x_0, f(x_0))$ noktasına **f fonksiyonunun bir yerel maksimum noktası** ve $f(x_0)$ değerine de **f fonksiyonun yerel maksimum değeri** denir. Yerel maksimum noktasında fonksiyon artanlıktan azalanlığa geçer.



f fonksiyonu (a, b) nda en küçük değerini x_0 apsisli noktada alıyorsa $(x_0, f(x_0))$ noktasına **f fonksiyonunun bir yerel minimum noktası** denir ve $f(x_0)$ değerine de **f fonksiyonun yerel minimum değeri** denir. Yerel minimum noktasında fonksiyon azalanlıktan artanlığa geçer.

Bir fonksiyonun yerel minimum ve yerel maksimum noktalarının hepsine birden **fonksiyonun ekstremum noktaları** denir.

5. ÖRNEK



Yanda verilen $f:(-5, 5) \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre f fonksiyonunun $(-5, 5)$ ndaki ekstremum noktalarını bulunuz.

ÇÖZÜM

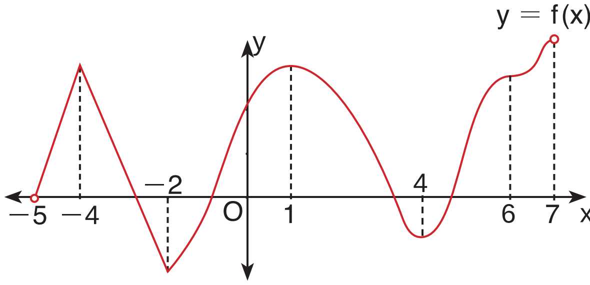
x	–5 ... –3	–3 ... 1	1 ... 3	3 ... 4	4 ... 5
f(x)	↗ Artan	↘ Azalan	↗ Artan	↘ Azalan	↗ Artan
	Yerel maksimum (–3)	Yerel minimum (1)	Yerel maksimum (3)	Yerel minimum (4)	

Buradan ekstremum noktalar $(-3, 6)$, $(1, -2)$, $(3, 0)$ ve $(4, -1)$ bulunur.

Bilgi

$f:[a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $x_0 \in (a, b)$ apsisli nokta bir ekstremum nokta olmak üzere f fonksiyonu x_0 apsisli noktada türevlenebiliyor ise $f'(x_0) = 0$ olur. Ancak $f'(x_0) = 0$ ise x_0 apsisli nokta bir ekstremum nokta olmak zorunda değildir. f' fonksiyonunun işareti x_0 apsisli noktada değişiyorsa x_0 apsisli nokta f fonksiyonunun bir ekstremum noktasıdır.

6. ÖRNEK



Yanda verilen $f:(-5, 7) \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları, bu aralıklardaki türevinin işaretini ve ekstremum noktalarını bulunuz. Ekstremum noktalarında fonksiyonun türevinin olup olmadığını inceleyiniz.

ÇÖZÜM

x	−5		−4		−2		1		4		6		7
f′(x)		+	o	−	o	+	o	−	o	+		+	
f(x)		Artan	Yerel maksimum	Azalan	Yerel minimum	Artan	Yerel maksimum	Azalan	Yerel minimum	Artan		Artan	

Yukarıdaki işaret tablosunda görüldüğü gibi $x = -4$ apsisli nokta fonksiyonun yerel maksimum noktasıdır ancak bu noktada fonksiyonun türevi yoktur.
Benzer şekilde $x = -2$ apsisli nokta fonksiyonun yerel minimum noktasıdır ve bu noktada da fonksiyonun türevi yoktur.
$x = 1$ apsisli nokta fonksiyonun yerel maksimum noktasıdır ve $f'(1) = 0$ olur.
$x = 4$ apsisli nokta fonksiyonun yerel minimum noktasıdır ve $f'(4) = 0$ olur.
$x = 6$ apsisli noktada $f'(6) = 0$ olur. Ancak bu nokta fonksiyonun ekstremum noktası değildir.
Buradan fonksiyonun ekstremum noktalarının apsisleri −4, −2, 1, ve 4 bulunur.

7. ÖRNEK

$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 15x + 1$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun varsa ekstremum noktalarınının apsislerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f'(x) = x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3$ ve $x_2 = 5$ olur.

x	−∞		−3		5		+∞
f′(x)		+	o	−	o	+	
f(x)		Artan	Yerel maksimum	Azalan	Yerel minimum	Artan	

Fonksiyonun ekstremum noktalarının apsisleri −3 ve 5 bulunur.

8. ÖRNEK

$f(x) = 3x^3 - 2ax^2 + 4x - 1$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun ekstremum noktası olmadığına göre a nın değer aralığını bulunuz.

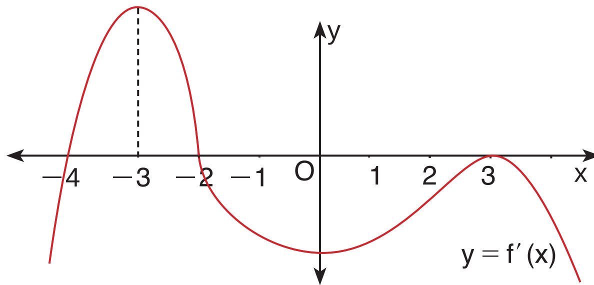
ÇÖZÜM

f fonksiyonunun ekstremum noktasının olmaması için $f'(x) = 0$ denkleminin gerçek kökünün olmaması veya çift katlı kökünün olması gerekir.
Bu durumda $f'(x) = 9x^2 - 4ax + 4 = 0$ denklemi için $\triangle \leq 0$ olmalıdır.
Buradan $(-4a)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 \leq 0 \Rightarrow 16 \cdot (a^2 - 9) \leq 0 \Rightarrow a^2 - 9 \leq 0$ eşitsizliğinin işaret tablosu yapılırsa
$a^2 - 9 = 0 \Rightarrow a_1 = -3$ ve $a_2 = 3$ olur.

a	$-\infty$	-3		3	$+\infty$
$a^2 - 9 \leq 0$	+	●	−	●	+
			Çözüm		

$-3 \leq a \leq 3$ bulunur.

9. ÖRNEK



Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. f fonksiyonunun varsa ekstremum noktalarının apsislerini bulunuz.

ÇÖZÜM

x	$-\infty$		-4		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		−	o	+	o	−	o o	−	
$f(x)$		↘ Azalan	Yerel minimum	↗ Artan	Yerel maksimum	↘ Azalan		↘ Azalan	

Yukarıdaki işaret tablosu incelendiğinde fonksiyonun ekstremum noktalarının apsisleri $x = -4$ ve $x = -2$ olur.

Ders İçi Uygulama 36

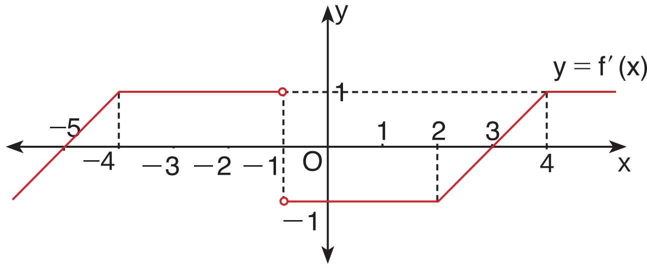
Bireysel Çalışma

1. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun varsa yerel ekstremum noktalarının apsislerini bulunuz.

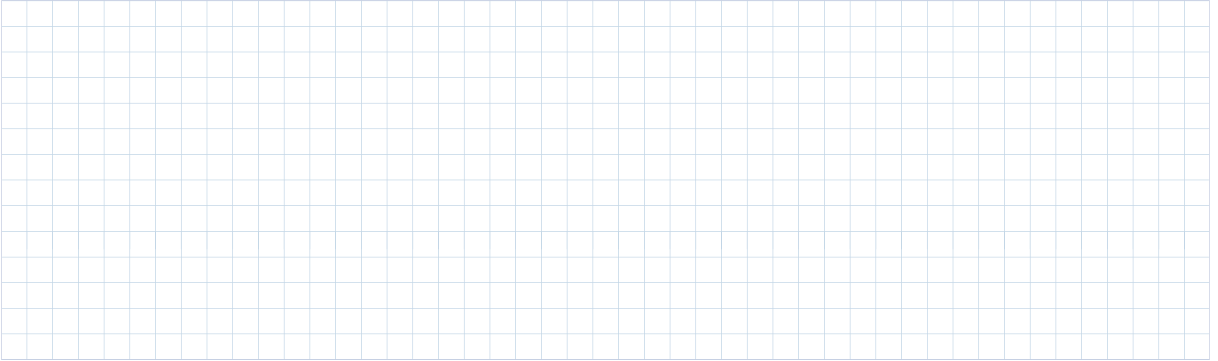
2. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2ax^2 + 4x + 3$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun yerel ekstremum noktası olmadığına göre a nın değer aralığını bulunuz.



3.



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.
f fonksiyonunun varsa yerel ekstremum noktalarının apsislerini bulunuz.



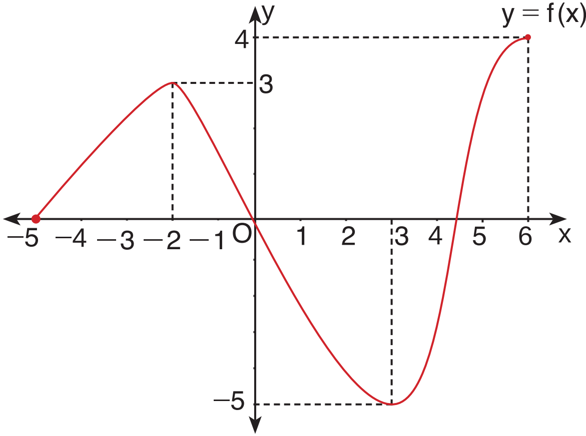
Bilgi

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun görüntü kümesindeki en büyük değere **f fonksiyonunun mutlak maksimum değeri** ve en küçük değere **f fonksiyonunun mutlak minimum değeri** denir.

$f:[a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta sürekli bir fonksiyon olsun. Fonksiyonun mutlak minimum ve mutlak maksimum değerini bulmak için $f(a)$ ve $f(b)$ değerleri ile varsa (a, b) ndaki ekstremum değerleri bulunur. Bulunan bu değerlerin en büyüğü f fonksiyonunun $[a, b]$ ndaki mutlak maksimum değeri ve en küçüğü de mutlak minimum değeri olur.

f fonksiyonu $[a, b]$ nda sürekli bir fonksiyon ise f fonksiyonun bu aralıkta mutlak maksimum veya mutlak minimum değeri vardır. Ancak f fonksiyonunun tanım kümesi (a, b) olduğunda mutlak minimum ve mutlak maksimum değeri bulunmayabilir.

10. ÖRNEK



Yanda $f:[5,\ 6] \rightarrow \mathbb{R},\ y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

f fonksiyonunun mutlak maksimum ve mutlak minimum değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Fonksiyonun uç noktalarda aldığı değerler $f(-5) = 0$ ve $f(6) = 4$ olur.
Fonksiyonun ekstremum noktalarında aldığı değerler $x = -2$ apsisli noktada fonksiyonun yerel maksimum noktası vardır.
Bu noktada fonksiyonun aldığı değer $f(-2) = 3$ olur.
$x = 3$ apsisli noktada fonksiyonun yerel minimum noktası vardır.
Bu noktada fonksiyonun aldığı değer $f(3) = -5$ olur.
Buradan $f:[5,\ 6] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun mutlak maksimum değeri 4 ve mutlak minimum değeri -5 bulunur.

11. ÖRNEK

$f:[-2,\ 4] \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun mutlak maksimum ve mutlak minimum değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Fonksiyonun uç noktalarda aldığı değerler

$$f(-2) = (-2)^3 - 3\cdot(-2)^2 - 9\cdot(-2) + 1 = -8 - 12 + 18 + 1 = -1$$

$$f(4) = (4)^3 - 3\cdot(4)^2 - 9\cdot(4) + 1 = 64 - 3\cdot 16 - 36 + 1 = -19 \text{ olur.}$$

Fonksiyonun ekstremum noktaları

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \text{ ve } x_2 = -1 \text{ olur.}$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		Artan ↗	Yerel maksimum	Azalan ↘	Yerel minimum	Artan ↗	

Fonksiyonun yerel maksimum değeri $f(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 - 9\cdot(-1) + 1 = 6$ ve yerel minimum değeri $f(3) = 3^3 - 3\cdot 3^2 - 9\cdot 3 + 1 = -26$ bulunur. Buradan fonksiyonunun mutlak minimum değeri -26 ve mutlak maksimum değeri 6 olur.

Ders İçi Uygulama 37 — Bireysel Çalışma

1. $f:[-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun mutlak maksimum ve mutlak minimum değerini bulunuz.

2.

Yanda $f:[-3, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

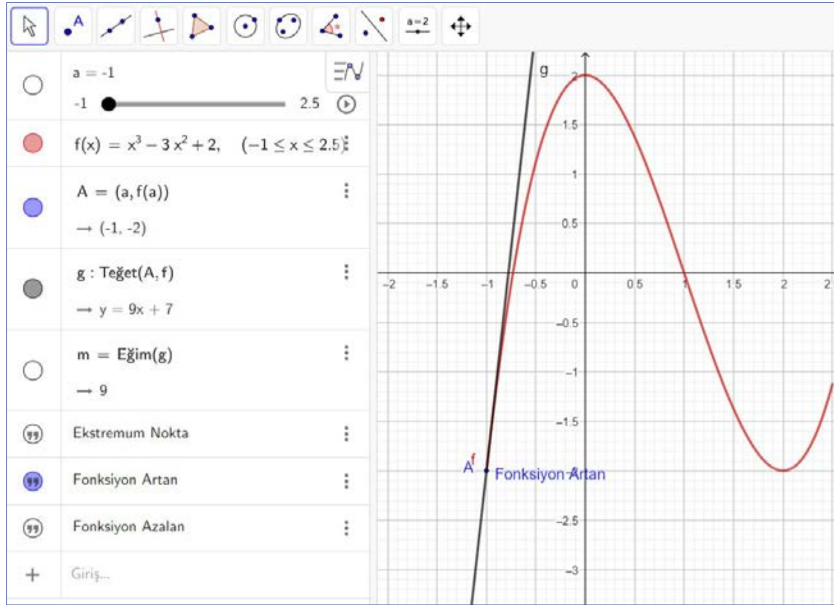
Buna göre f fonksiyonunun mutlak maksimum ve mutlak minumum değerini bulunuz.

3. $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3x$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun x eksenini üç farklı noktada kesmesi için m nin hangi aralıkta olması gerektiğini bulunuz.

Ders İçi Uygulama 38 — Teknoloji

Dinamik matematik programını kullanarak kapalı bir aralıkta tanımlı f fonksiyonunun grafiğini çizerek artan veya azalan olduğu aralıklar ile ekstremum noktalarını bulmak için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. Adım: Giriş kısmına **Eğer(-1 ≤ x ≤ 2.5, x^3-3 x^2+2)** yazılarak f fonksiyonunun belirlenen aralıktaki grafiği çizilir.
2. Adım: Sürgü aracı seçildikten sonra grafik alanının boş bir yerine tıklanarak bir sürgü oluşturulur ve "Aralık" sekmesindeki değerler **a=-1, Min: -1, Maks: 2.5, Artış: 0.01** ve "Canlandırma" sekmesindeki değerler **Hız=0.5, Tekrar: Artan** olarak ayarlanır.
3. Adım: Giriş kısmına **(a,f(a))** yazılarak f fonksiyonunun grafiği üzerindeki A noktası oluşturulur.
4. Adım: Giriş kısmına **Teğet(A,f)** yazılarak f fonksiyonunun grafiğine A noktasında teğet olan g doğrusunun grafiği çizilir.
5. Adım: Giriş kısmına **m=Eğim(g)** yazılarak teğet doğrusunun eğimi m olarak belirlenir.
6. Adım: Metin aracı seçildikten sonra grafik alanının boş bir yerine tıklanarak "Ekstremum Nokta", "Fonksiyon Artan" ve "Fonksiyon Azalan" şeklinde üç farklı metin kutusu oluşturulur.
7. Adım: Metin kutuları seçildikten sonra "Ayarlar-Gelişmiş-Yer" sekmesi altındaki "Başlangıç noktası" kısmından A noktası seçilir.
8. Adım: "Ekstremum Nokta", "Fonksiyon Artan" ve "Fonksiyon Azalan" metin kutularının "Ayarlar-Gelişmiş-Nesneyi gösterme şartı" kısmına sırasıyla m=0, m>0 ve m<0 yazılır.
9. Adım: Sürgü hareket ettirilerek f fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıklar ile ekstremum noktaları bulunur.



Yukarıdaki örneğe göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Teğet doğrusunun eğiminin pozitif olduğu aralıklar ile f fonksiyonunun artan olduğu aralıkları bularak karşılaştırınız.

2. Teğet doğrusunun eğiminin 0 olduğu yerlerde hangi metin kutusunun göründüğünü belirleyiniz.

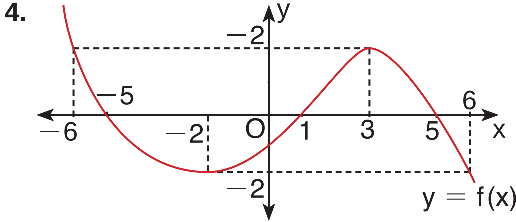
3. f fonksiyonunun verilen aralıktaki en büyük ve en küçük değerini bulunuz.

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-6x+1$ **kuralı ile verilen f fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.**

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$ **kuralı ile verilen f fonksiyonunun artan olduğu en geniş aralığı bulunuz.**

3. $f(x)=2x^3+x^2-mx+4$ **kuralı ile verilen f fonksiyonunun gerçek sayılar kümesinde daima artan olması için m nin değer aralığını bulunuz.**

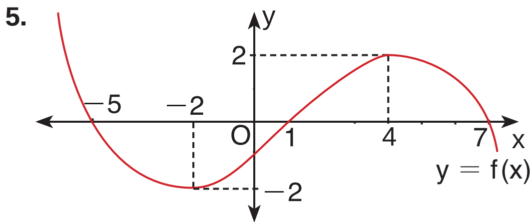
4.



Yukarıda verilen $y=f(x)$ **fonksiyonunun grafiğine göre** $[-6,\ 6]$ **nda**

a) $f'(x)<0$ **eşitsizliğini sağlayan x tam sayıların toplamını bulunuz.**
b) $f'(x)\geq 0$ **eşitsizliğini sağlayan tam sayı değerlerini bulunuz.**

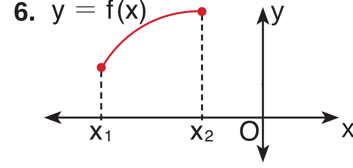
5.



Yukarıda verilen $y=f(x)$ **fonksiyonunun grafiğine göre aşağıdaki ifadelerden doğru olanları bulunuz.**

I. $f'(-3)<0$
II. $f'(4)=0$
III. $f'(-1)>0$
IV. $f'(6)>0$
V. $f'(-4)<0$
VI. $f(5)<0$

6.



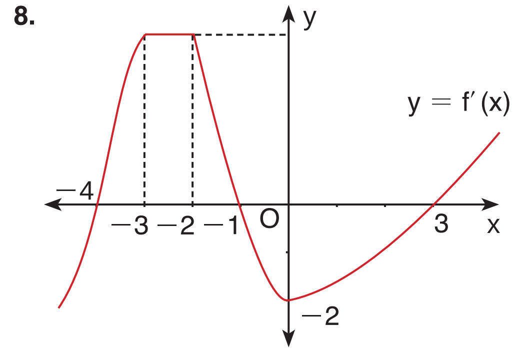
Yukarıda $[x_1,\ x_2]$ nda tanımlı $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre aşağıdaki fonksiyonların verilen aralıkta artan veya azalan olma durumlarını inceleyiniz.

a) $\dfrac{x}{f(x)}$ **b)** $f^3(x)$ **c)** $f(x^2)$ **ç)** $x^2\cdot f(x)$

7. $f(x)=|x^2-4x|$ **kuralı ile verilen f fonksiyonunun artan olduğu aralıkları bulunuz.**

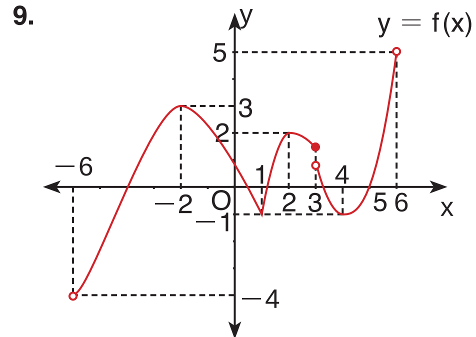
8.



Yukarıda $y=f'(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre f fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.

9.



Yukarıda $f:(-6,6)\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonksiyonun grafiği verilmiştir.

f fonksiyonunun verilen aralıktaki ekstremum noktalarını bulunuz.

Türev Yardımıyla Bir Fonksiyonun Grafiğinin Çizimi

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ biçimindeki polinom fonksiyonunun grafiği çizilirken fonksiyonun eksenleri kestiği noktalar bulunur. Birinci türevi yardımıyla varsa fonksiyonun artan veya azalan olduğu aralıklar ile ekstremum noktaları bulunur.

12. ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4x^2$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

Fonksiyonun grafiğinin y eksenini kestiği nokta $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0^2 = 0$ olur.
Fonksiyonun grafiğinin x eksenini kestiği noktalar

$y = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 - 4x^2 = 0$

$x^2 \cdot (x^2 - 4) = 0$

$x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = -2$ ve $x_4 = 2$ bulunur.

Fonksiyonun artan-azalan olduğu aralıklar ve ekstremum noktaları

$f(x) = x^4 - 4x^2 \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot x^3 - 8 \cdot x$

$= 4x(x^2 - 2) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{2}$ ve $x_3 = \sqrt{2}$ olur.

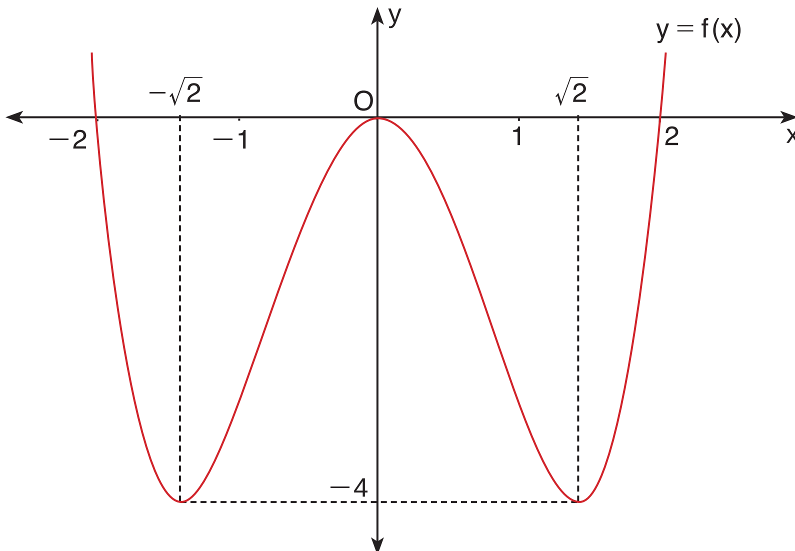
x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f′(x)		−	0	+	0	−	0	+	
f(x)		Azalan ↘	Yerel minimum	Artan ↗	Yerel maksimum	Azalan ↘	Yerel minimum	Artan ↗	

Fonksiyonun yerel maksimum değeri $f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0^2 = 0$, yerel minimum değerleri

$f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 - 4 \cdot (-\sqrt{2})^2 = -4$ ve

$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - 4 \cdot (\sqrt{2})^2 = -4$ olur.

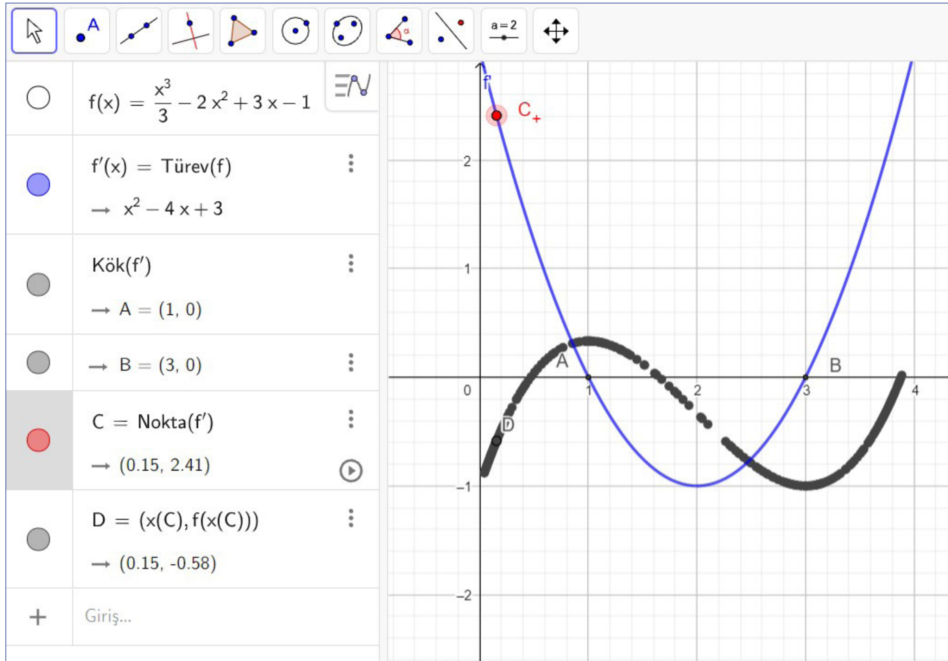
Bulunan değerler ile fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibi çizilir.



Ders İçi Uygulama 39 — Teknoloji

Dinamik matematik programını kullanarak türevi bilinen bir fonksiyonun grafiğini çizmek için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. Adım: Giriş kısmına $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 1$ yazılarak f fonksiyonunun grafiği çizilir ve ayarlar menüsünden fonksiyonun görünürlüğü kaldırılır.
2. Adım: Giriş kısmına **Türev(f)** yazılarak f fonksiyonunun türevi olan f′ fonksiyonunun grafiği çizilir.
3. Adım: Giriş kısmına **Kök(f')** yazılarak f′ fonksiyonunun A ve B kökleri bulunur.
4. Adım: Giriş kısmına **Nokta(f')** yazılarak f′ fonksiyonu üzerinde herhangi bir C noktası alınır.
5. Adım: C noktasının "Ayarlar-Temel" sekmesindeki "Etiketi göster" kısmı "Başlık" olarak ayarlanır.
6. Adım: C noktasının "Ayarlar-Betikleme-Güncellendiğinde" sekmesine alt alta
Eğer(y(C)>0,AyarlaBaşlık(C,"C_+"))
Eğer(y(C)==0,AyarlaBaşlık(C,"C"))
Eğer(y(C)<0,AyarlaBaşlık(C,"C_-"))
şartları yazılır.
7. Adım: C noktası hareket ettirilerek f fonksiyonunun işareti incelenir.
8. Adım: Giriş kısmına **(x(C),f(x(C))** yazılarak f fonksiyonu üzerindeki C noktasının konumuna karşılık gelen D noktası bulunarak "İzi Göster" özelliği aktif edilir.
9. Adım: C noktası hareket ettirildikçe oluşan f fonksiyonunun grafiğinin artan, azalan ve ekstremum noktaları ile f′ fonksiyonunun işareti incelenir.



Yukarıdaki örneğe göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. f′ fonksiyonunun pozitif ve f fonksiyonunun artan olduğu aralığı belirleyiniz.

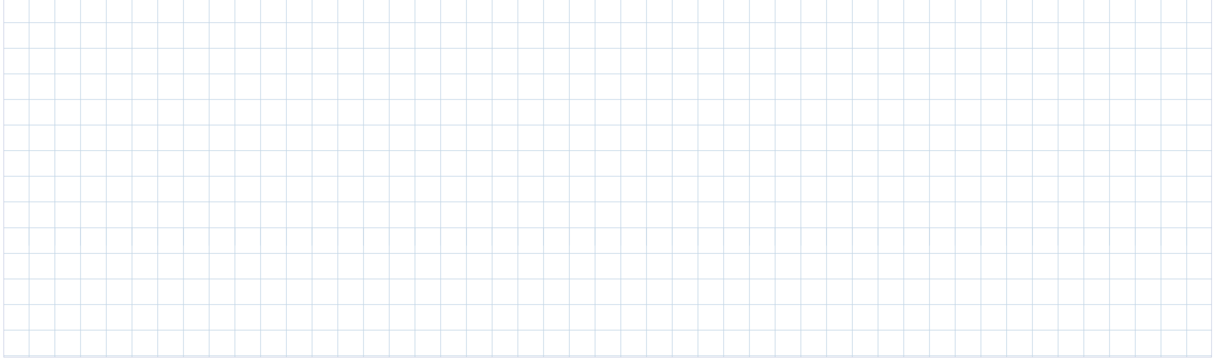
2. f′ fonksiyonunun negatif ve f fonksiyonunun azalan olduğu aralığı belirleyiniz.

3. f′ fonksiyonunun köklerinin ve f fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsislerini bulunuz.

Ders İçi Uygulama 40

Bireysel Çalışma

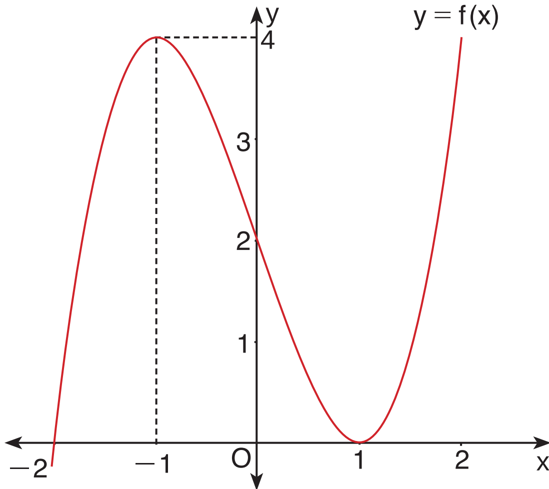
1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x^2-1)^2$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+1)(x^2+1)$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



3.



Yanda grafiği verilen fonksiyonun aşağıdakilerden hangisi olduğunu bulunuz.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+1)(x-1)^2$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+2)(x-1)$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+2)^2(x-1)^2$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+2)^3(x-1)^2$

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+2)(x-1)^2$



Maksimum ve Minimum Problemleri

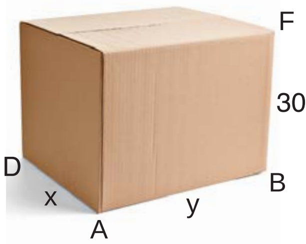
Maksimum ve minimum problemlerinde bir çokluğun alabileceği en büyük ya da en küçük değerin bulunması istenir. Maksimum ve minimum problemlerini çözmek için aşağıdaki adımlar izlenir:

I. Problemde verilenler değişkenler ile gösterilir.
II. Maksimum veya minimum olması istenen çoklukla ilgili bir ifade bulunur.
III. Verilenler kullanılarak tek değişkenli bir fonksiyon elde edilir.
IV. Bulunan fonksiyonun türevi alınarak işaret tablosu yapılır ve fonksiyonun artan veya azalan olduğu aralıklar bulunur.
V. Ekstremum noktalarında aldığı değer bulunarak fonksiyonun en küçük veya en büyük değeri elde edilir.

13. ÖRNEK

Bir market ramazan ayında ihtiyaç sahipleri için yardım kolisi hazırlamak istiyor. Dikdörtgenler prizması biçimindeki kolilerin yüksekliği 30 cm ve taban ayrıtlarının uzunlukları toplamı 80 cm olacağına göre hacminin en büyük değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$|AD| = x$ ve $|AB| = y$ olmak üzere $x + y = 80$ olur. Kutunun hacmi $H = 30 \cdot x \cdot y \Rightarrow H(x) = 30 \cdot x \cdot (80 - x) = 2400x - 30x^2$ olur. Kutunun hacminin maksimum değer alması için $H(x)$ fonksiyonunun maksimum değerinin bulunması gerekir. Buradan $H'(x) = 0$ olmalıdır.

$H(x) = 2400x - 30x^2$

$H'(x) = 2400 - 60x = 0 \Rightarrow x = 40$ cm bulunur.

Buradan kutunun hacminin en büyük değeri

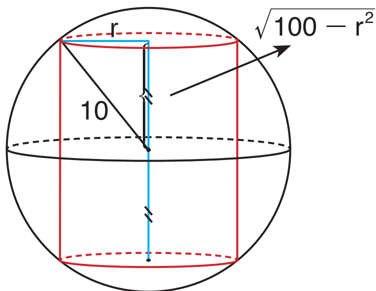
$x = 40 \Rightarrow x + y = 80 \Rightarrow y = 40$

$H(x) = 30 \cdot x \cdot y = 30 \cdot 40 \cdot 40 = 48\,000 \text{ cm}^3$ olur.

14. ÖRNEK

Yarıçap uzunluğu 10 cm olan bir kürenin içerisine en büyük hacimli dik silindir yerleştirilecektir. Silindirin yarıçap uzunluğunun en büyük değerini cm cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM



Silindirin yarıçap uzunluğu r olmak üzere hacmi $H(r) = \pi r^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{100 - r^2}$ olur. Silindirin hacminin maksimum değer alması için $H(r)$ fonksiyonunun maksimum değerinin bulunması gerekir. Buradan $H'(r) = 0$ olmalıdır.

$H(r) = \pi r^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{100 - r^2}$

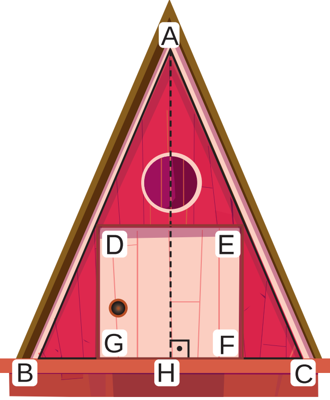
$H'(r) = 4\pi r \cdot \sqrt{100 - r^2} + \dfrac{-2r}{2\sqrt{100 - r^2}} 2\pi r^2$

Buradan $H'(r) = 4\pi r \cdot \sqrt{100 - r^2} + \dfrac{-2r}{2\sqrt{100 - r^2}} 2\pi r^2 = 0$

$\Rightarrow \overset{2}{\cancel{4}}\pi r \cdot \sqrt{100 - r^2} = \dfrac{\cancel{2}r}{\cancel{2}\sqrt{100 - r^2}} \cancel{2}\pi r^2 \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{100 - r^2} = \dfrac{r^2}{\sqrt{100 - r^2}} \Rightarrow 2(100 - r^2) = r^2$

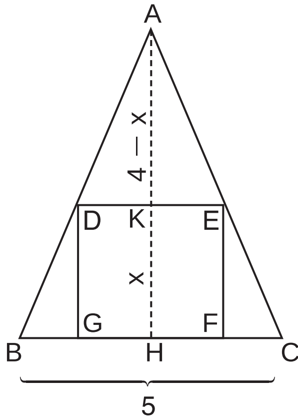
$\Rightarrow 200 - 2r^2 = r^2 \Rightarrow 3r^2 = 200 \Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{200}{3}} = \dfrac{10\sqrt{6}}{3}$ cm bulunur.

15. ÖRNEK



Yanda önden görüntüsü ABC ikizkenar üçgeni biçiminde verilen bir ahşap evde $|BC| = 5$ m ve $|AH| = 4$ m olmak üzere bu evin ön cephesine DEFG dikdörtgeni biçiminde bir kapı yapılacaktır. Kapının alanının alabileceği en büyük değeri m^2 cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM



$|KH| = x$ ve $|DE| = y$ olmak üzere ABC üçgeni ADE üçgeni ile benzer olduğundan $\frac{|AK|}{|AH|} = \frac{|DE|}{|BC|} \Rightarrow \frac{4-x}{4} = \frac{y}{5} \Rightarrow 4y = 20 - 5x \Rightarrow y = 5 - \frac{5x}{4}$ olur.

DEFG dikdörtgeninin alanı $A = x \cdot y = x\left(5 - \frac{5x}{4}\right) = 5x - \frac{5x^2}{4}$ bulunur. Alanın maksimum değer alması için $A(x)$ fonksiyonunun maksimumunun bulunması gerekir.

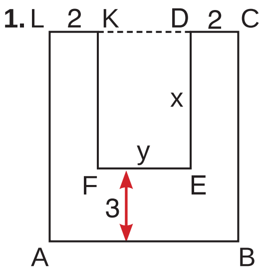
Buradan $A'(x) = 0$ olmalıdır. $A'(x) = 5 - \frac{10x}{4} = 0 \Rightarrow \frac{5x}{2} = 5 \Rightarrow x = 2$ olur.

Bu durumda alanın maksimum değeri

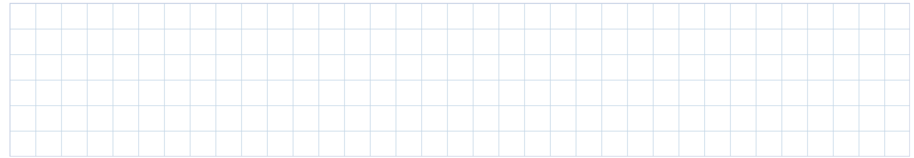
$A(x) = 5x - \frac{5x^2}{4} \Rightarrow A(2) = 5 \cdot 2 - \frac{5 \cdot 2^2}{4} = 5$ m^2 bulunur.

Ders İçi Uygulama 41 — Bireysel Çalışma

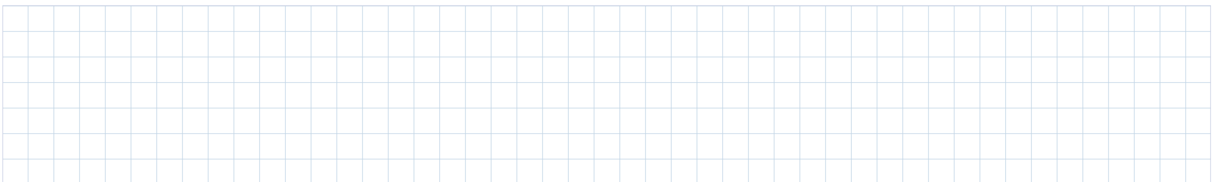
1.



ABCL dikdörtgeninin içerisindeki KFED dikdörtgeninin KD kenarı çıkartılarak yandaki geometrik şekil elde edilmiştir.
Şeklin çevre uzunluğu 70 cm olduğuna göre KFED dikdörtgeninin alanının en fazla kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



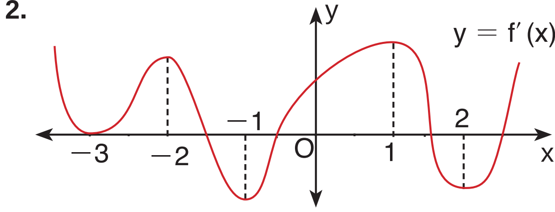
2. Yarıçap uzunluğu 5 birim olan bir küre içerisine yerleştirilebilen dik konilerden hacmi en büyük olanın yüksekliğinin kaç birim olduğunu hesaplayınız.



ALIŞTIRMALAR 5.7

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ **fonksiyonunun varsa ekstremum noktalarının apsislerini bulunuz.**

2.



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.

f fonksiyonunun kaç tane ekstremum noktası olduğunu bulunuz.

3. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2mx - 1$ **fonksiyonu bire bir ve örten olduğuna göre m nin alabileceği değer aralığını bulunuz.**

4. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + 2$ **fonksiyonunun ekstremum noktalarından biri** $A(-1, 5)$ **olduğuna göre (a, b) değerini bulunuz.**

5. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + c - 1$ **fonksiyonunun yerel maksimum değeri 4 olduğuna göre c değerini bulunuz.**

6. Toplamları 16 olan pozitif iki tam sayının

a) Çarpımlarının <u>en büyük</u> değerini bulunuz.

b) Kareleri toplamının <u>en küçük</u> değerini bulunuz.

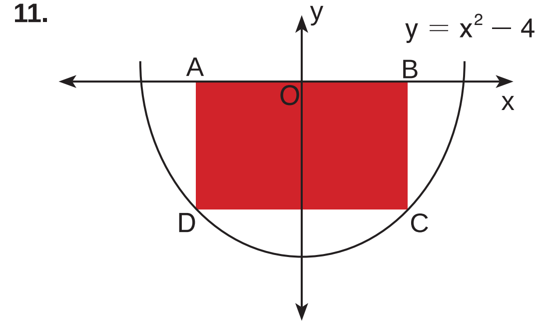
7. Köşegen uzunluğu $10\sqrt{2}$ cm **olan bir dikdörtgenin alanının <u>en çok</u> kaç** cm^2 **olduğunu bulunuz.**

8. Yarıçap uzunluğu 5 cm olan bir küre içine çizilebilecek <u>en büyük</u> hacimli silindirin hacmini bulunuz.

9. Yarıçap uzunluğu 10 cm olan yarım dairenin içine çizilebilecek <u>en büyük</u> dikdörtgenin alanını bulunuz.

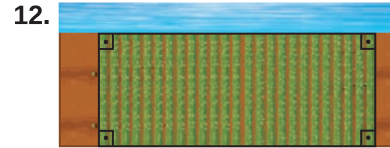
10. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 7$ **eğrisi üzerinde alınan** $P(x, y)$ **noktasının koordinatları toplamının alabileceği <u>en küçük</u> değeri bulunuz.**

11.



Yukarıda verilen şekildeki ABCD dikdörtgeninin alanının <u>en çok</u> kaç birimkare olduğunu bulunuz.

12.



Yukarıdaki şekilde bir tarafından akarsu geçen dikdörtgen biçiminde bir tarla modellenmiştir. Tarlanın 3 kenarına 2 sıra tel çekilerek 320 metre uzunluğunda tel kullanılmıştır.

Bu tarlanın alanının <u>en fazla</u> kaç m^2 **olduğunu bulunuz.**

1-5. cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun ifadeleri yazınız.

1. Bir fonksiyonun $x = a$ noktasındaki soldan limiti sağdan limitine eşit ise fonksiyonun bu noktada limiti .... denir.

2. Bir fonksiyonun $x = a$ noktasındaki görüntüsü limitine eşit ise fonksiyon $x = a$ noktasında .... denir.

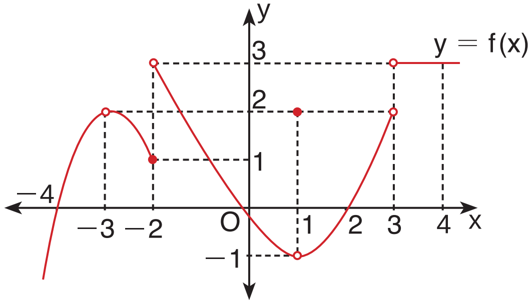
3. Türevlenebilir bir fonksiyonun türevinin negatif olduğu aralıkta fonksiyon .... olur.

4. Bir fonksiyonun sürekli olup türevli olmadığı noktalara .... noktaları denir.

5. Bir fonksiyon sürekli olduğu bir noktada .... olmayabilir.

6 ve 7. sorularda harflerle gösterilen ifadeleri numaralarla gösterilen ifadelerle eşleştiriniz.

6.

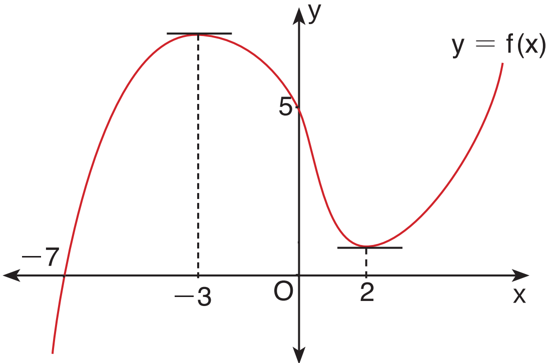


Yandaki $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre aşağıdaki limitleri, verilen değerler ile eşleştiriniz.

a) $\lim_{x \to -4} f(x)$ **b)** $\lim_{x \to -3} f(x)$ **c)** $\lim_{x \to -2^+} f(x)$ **ç)** $\lim_{x \to -2^-} f(x)$ **d)** $\lim_{x \to 1} f(x)$ **e)** $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ **f)** $\lim_{x \to 4} f(x)$

I. −4 **II.** −1 **III.** 0 **IV.** 1 **V.** 2 **VI.** 3 **VII.** 4

7.



Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve grafiğe çizilen teğetler verilmiştir.

Buna göre aşağıda verilen türev değerlerinin işaretlerini eşleştiriniz.

a) $f'(-3)$ **b)** $f'(2)$ **c)** $f'(-5)$ **ç)** $f'(-1)$ **d)** $f'(1)$

I. Negatif **II.** 0 **III.** Pozitif

8-20. çoktan seçmeli soruları cevaplayınız.

8. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$ **ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) ∞ B) -1 C) $\frac{3}{2}$ D) 0 E) $\frac{1}{24}$

9. $m, n \in \mathbb{R}$ **ve** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-5x+m}{x^2-1} = n$ **olduğuna göre** $m.n$ **kaçtır?**

A) -2 B) 0 C) 1 D) $-\frac{3}{2}$ E) -6

10. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+5}, & x < -2 \text{ ise} \\ \dfrac{x+2}{x+1}, & -2 \le x \le 3 \text{ ise} \\ \dfrac{\log_3 x}{\sqrt{x}-5}, & x > 3 \text{ ise} \end{cases}$

kuralı ile verilen f fonksiyonunun sürekli olmadığı noktaların apsisleri toplamı kaçtır?

A) -5 B) 0 C) 18 D) 20 E) 21

11. $f(x) = \begin{cases} x^2+mx-3, & x > 3 \text{ ise} \\ x^2-4n, & x \le 3 \text{ ise} \end{cases}$

kuralı ile verilen f fonksiyonu her noktada türevli ise $m-n$ **değeri kaçtır?**

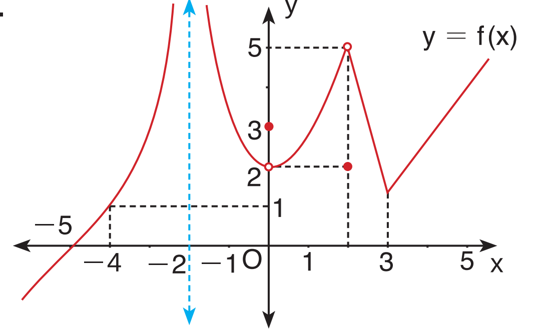
A) -4 B) $-\frac{3}{4}$ C) 0 D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{4}$

12. $f(x) = -x^2 + 4mx - 11$ **kuralı ile verilen f fonksiyonunun yerel maksimum değeri** -7 **ise m nin negatif değeri kaçtır?**

A) -5 B) -3 C) $-\sqrt{2}$

D) -2 E) -1

13.



Yukarıda verilen $y = f(x)$ **fonksiyonunun grafiğine göre aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?**

I. $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = 3$

II. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$

III. $f'(-1) > 0$

IV. $f'(3) = 0$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

14. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + mx + n$ **kuralı ile verilen f fonksiyonunun ekstremum noktası olmadığına göre m nin <u>en küçük</u> tam sayı değeri kaçtır?**

A) -3 B) -1 C) 0 D) 2 E) 5

15. $y = \dfrac{|x^2-6x+9|}{x^2-2x}$ **kuralı ile verilen f fonksiyonunun türevli olduğu küme aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$

B) $\mathbb{R} - \{0, 2, 3\}$

C) $\mathbb{R} - \{2, 3\}$

D) $\mathbb{R} - \{0\}$

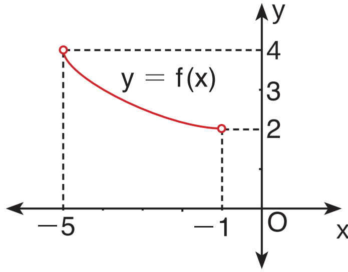
E) $\mathbb{R} - \{0, 2\}$

16. $y = \frac{2t^2 + 1}{4}$ ve $t = \frac{x - 1}{x + 2}$

biçiminde verilen $y = f(x)$ **fonksiyonu için** $f'(-5)$ **değeri kaçtır?**

A) $-\frac{2}{3}$ B) -3 C) 1 D) 2 E) $\frac{2}{3}$

17.



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun $f:(-5, -1)$ ndaki grafiği verilmiştir.

Buna göre aşağıdakilerden kaç tanesi kesinlikle aynı aralıkta azalandır?

I. $\frac{f(x)}{x^2}$

II. $x^2 \cdot f(x)$

III. $f^2(x)$

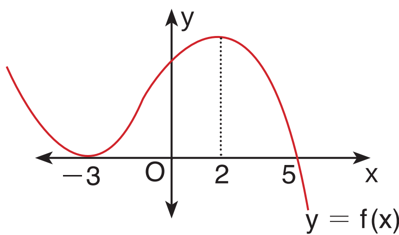
IV. $(1 - x).f(x)$

V. $\frac{x}{f(x)}$

VI. $\frac{f(x)}{3 - x}$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

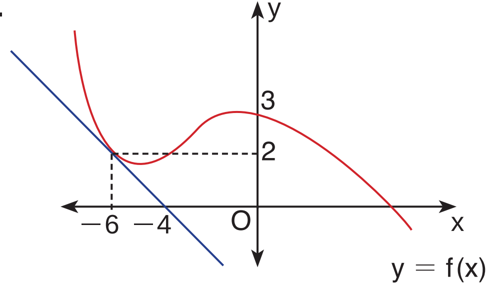
18.



Yukarıda verilen $y = f(x)$ **fonksiyonunun grafiğine göre** $[-3, 7]$ **nda** $f(x) \cdot f'(x) \leq 0$ **eşitsizliğini sağlayan kaç tam sayı vardır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19.

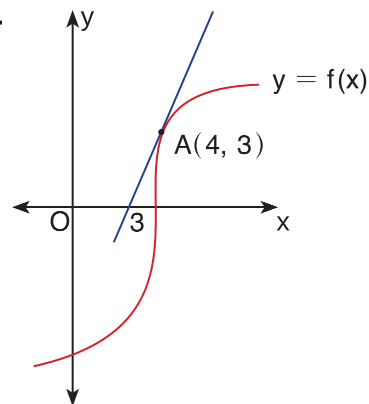


Yukarıda verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine $A(-6, 2)$ noktasından çizilen teğet $B(-4, 0)$ noktasından geçmektedir.

Buna göre $g(x) = f^2(x) - 3f(x) + x$ **fonksiyonunun grafiği üzerindeki** $x = -6$ **apsisli noktasından çizilen teğetin eğimi kaçtır?**

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 7

20.



Şekilde f fonksiyonunun $A(4, 3)$ noktasındaki teğet doğrusu verilmiştir.

$g(x) = f(2x)$ **olduğuna göre** $g'(2)$ **kaçtır?**

A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

21-23. beceri temelli soruları aşağıdaki bilgilere göre cevaplayınız.

Doğrusal olarak hareket eden bir hareketlinin t dakika sonraki konum denklemi $X(t)$ olmak üzere cismin anlık hızı $V(t)=\frac{dX(t)}{dt}$ ve anlık ivmesi $a(t)=\frac{dV(t)}{dt}$ ile bulunur.

Buna göre doğrusal hareket eden iki hareketliye ait zamana bağlı konum denklemleri

A hareketlisi $f(t)=\frac{t^2}{2}+4t+10$,

B hareketlisi $g(t)=-\frac{t^3}{3}+\frac{7t^2}{2}-t+5$

ile verilmiştir.

21. Kaçıncı saniyelerde hareketlilerin anlık hızı eşit olur?

A) 1 ve 3 B) 2 ve 3 C) 3 ve 4

D) 1 ve 5 E) 3 ve 5

22. Başlangıçtan itibaren hareketlilerin anlık hızının ikinci kez eşit olduğu ana kadar geçen sürede A hareketlisinin ortalama hızı kaç m/sn. olur?

A) 1 B) $\frac{11}{2}$ C) $\frac{13}{2}$ D) $\frac{15}{2}$ E) $\frac{17}{2}$

23. Hareketlilerin anlık hızlarının ilk kez eşit olduğu anda B hareketlisinin anlık ivmesinin kaç $m/sn.^2$ **dir?**

A) 5 B) 6 C) 7 D) 10 E) 20

24-39. açık uçlu soruları cevaplayınız.

24. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{1-\sqrt{x^2-3}}$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

25. $\lim\limits_{x\to k}\frac{x-1}{x^2+kx-3}=2$ **olduğuna göre k nin alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.**

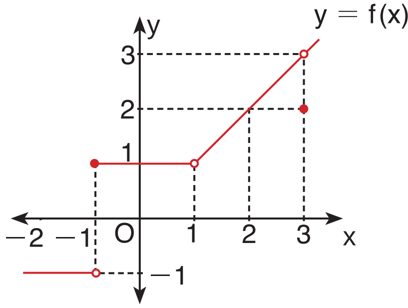
26. $f(x)=\begin{cases}3mx+n, & x<-1 \text{ ise}\\ mx^2-n, & x>-1 \text{ ise}\end{cases}$

biçiminde tanımlı f fonksiyonu veriliyor.

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$ **ve** $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=-8$ **olduğuna göre** $m+n$ **değerini bulunuz.**

27. $f(x)=\frac{2x^2-x-3}{x^2-mx+1}$ **kuralı ile verilen f fonksiyonu gerçek sayılar kümesinde sürekli ise m nin alabileceği kaç tam sayı değeri olduğunu hesaplayınız.**

28.

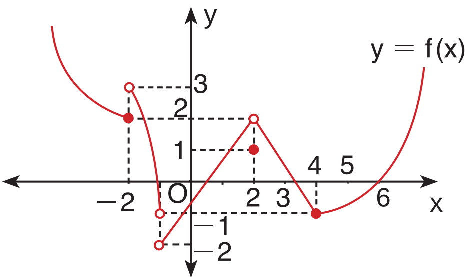


Yukarıda verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre

a) $[-2, 3]$ **ndaki tam sayılardan hangilerinin limit değerinin hesaplanabileceğini bulunuz.**

b) $[-2, 3]$ **ndaki tam sayılardan** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ **koşulunu sağlayan x değerlerini bulunuz.**

29.



Yukarıda verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre

a) Kaç farklı x değeri için f fonksiyonunun limitinin olmadığını hesaplayınız.

b) f fonksiyonunun kaç farklı x değeri için sürekli olmadığını hesaplayınız.

30. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{2x^2 - 4x}, & x \leq 1 \text{ ise} \\ \dfrac{2x + 1}{5x - 15}, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$

kuralı ile verilen f fonksiyonunun sürekli olmadığı kaç x değeri olduğunu bulunuz.

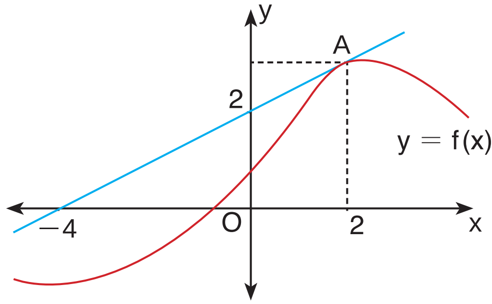
31. $f: \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 2}$ **eğrisine** $x = a$ **apsisli noktasından çizilen teğet** $y = 1 - 7x$ **doğrusuna parelel olduğuna göre a nın hangi değerleri alabileceğini hesaplayınız.**

32. $f(x) = \dfrac{2x + 5}{x + 4}$ **kuralı ile verilen f fonksiyonuna göre** $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{f(x) + 1}{x + 3}$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

33. m, n $\in \mathbb{R}$ **olmak üzere**

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - mx + 6}{x - 2} = n$ **ise** $m + n$ **değerini bulunuz.**

34.



Yukarıda verilen grafikte d doğrusu f fonksiyonuna A noktasında teğettir.

Buna göre $g(x) = x^2 \cdot f(x)$ **şeklinde verilen g fonksiyonunun** $x = 2$ **apsisli noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.**

35. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ **kuralı ile verilen f fonksiyonunun yerel maksimum değerinin yerel minimum değerinden kaç fazla olduğunu bulunuz.**

36. $\begin{array}{l} y = t^3 - 2t \\ x = t^2 + 1 \end{array}$ **olduğuna göre** $t = -1$ **için**

$\dfrac{dy}{dx}$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

37. m, n $\in \mathbb{R}$, f **gerçek sayılar kümesinde sürekli bir fonksiyon ve**

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2m + 4$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 3n$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5n + 4$

olduğuna göre $m + n$ **değerini bulunuz.**

Daha fazla soruya ulaşmak için karekodu okutunuz



SAYILAR VE CEBİR

6. İNTEGRAL

6.1. BELİRSİZ İNTEGRAL

6.2. BELİRLİ İNTEGRAL VE UYGULAMALARI

Bu Bölümde Neler Öğreneceksiniz?

Belirsiz İntegral
- Bir fonksiyonun belirsiz integralini açıklayarak integral alma kurallarını oluşturmayı,
- Değişken değiştirme yöntemini kullanarak integral almayı öğreneceksiniz.

Belirli İntegral ve Uygulamaları
- Bir fonksiyonun grafiği ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanını Riemann (Riman) toplamı yardımıyla yaklaşık hesaplamayı,
- Bir fonksiyonun belirli ve belirsiz integralleri arasındaki ilişkiyi açıklamayı,
- Belirli integralin özelliklerini kullanarak işlem yapmayı,
- Belirli integral ile alan hesabı yapmayı öğreneceksiniz.


Alt öğrenme alanı karekodu

Alt öğrenme alanı sunu karekodu



Hazırlık Çalışması

Küresel ısınma nedeniyle yaşanan iklim değişikliği sonucunda Dünya'nın ısısı her geçen gün artmaktadır. Kutuplardaki buzulların erimesiyle son yirmi beş yılda deniz seviyesi yaklaşık 7-8 cm yükselmiştir. Küresel ısınma bu şekilde devam ederse Hollanda, Almanya, Danimarka gibi ülkelerin topraklarının deniz sularıyla kaplanacağı, toprakların verimsizleşeceği ve gıda krizinin yaşanacağı tahmin edilmektedir.

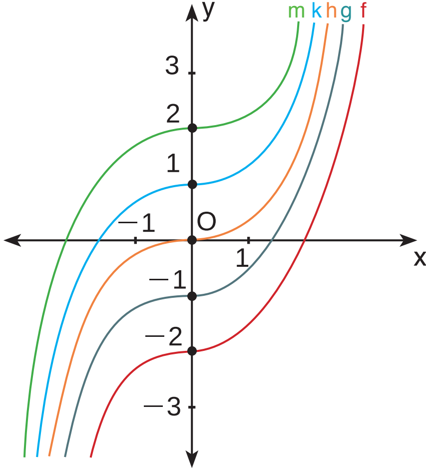
Buna göre her yıl buzulların kapladığı alanı hesaplamak isteyen bilim insanları düzgün geometrik bir şekil olmayan buzulların alanını nasıl hesaplayabilir? Araştırınız.

6.1. BELİRSİZ İNTEGRAL

Terimler ve Kavramlar

- **Ters Türev**
- **Belirsiz İntegral**
- **İntegral Sabiti**

Bir Fonksiyonun Belirsiz İntegrali ve İntegral Alma Kuralları



Yanda verilen grafikte $f(x) = x^3 - 2$, $g(x) = x^3 - 1$, $h(x) = x^3$, $k(x) = x^3 + 1$ ve $m(x) = x^3 + 2$ şeklinde tanımlanan f, g, h, k, m fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre

a) Bu fonksiyonlara $x = -1$, $x = 0$ ve $x = 2$ apsisli noktalarından çizilen teğet doğrularının eğimlerini bularak aynı noktalardaki eğimlerini karşılaştırınız.

b) Bu fonksiyonların grafikleri herhangi bir noktada kesişir mi? Tartışınız.

1. ÖRNEK

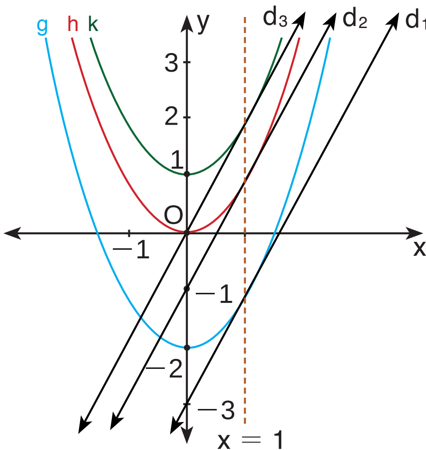
Aşağıda verilen fonksiyonların türevlerini bulunuz. Fonksiyonların ve $x = 1$ noktasından geçen teğet doğrularının grafiğini çizerek inceleyiniz.

a) $g(x) = x^2 - 2$ **b)** $h(x) = x^2$ **c)** $k(x) = x^2 + 1$

ÇÖZÜM

Verilen fonksiyonların türevleri alınırsa

a) $g'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 - 2) = 2x$ **b)** $h'(x) = \frac{d}{dx}x^2 = 2x$ **c)** $k'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 + 1) = 2x$ bulunur.



Elde edilen sonuçlar incelendiğinde g, h ve k fonksiyonları türevi $f(x) = 2x$ olan f fonksiyonlarıdır. Türevi 2x olan sonsuz sayıda fonksiyon bulunmaktadır.

Ayrıca yandaki grafikte de görüldüğü gibi g, h ve k fonksiyonlarının $x = 1$ noktasındaki teğet doğruları d_1, d_2 ve d_3 olmak üzere $d_1 \mathbin{/\!/} d_2 \mathbin{/\!/} d_3$ olur.

Bilgi

Bir F fonksiyonun türevi f olmak üzere her $x \in A$ için $F'(x) = f(x)$ ise F fonksiyonuna **f fonksiyonunun A aralığındaki ters türevi** denir.

$c \in \mathbb{R}$, bir fonksiyonun türevi f ve f nin tüm ters türevlerinin kümesi $F(x)$ olmak üzere $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ olacak şekilde bir $F(x)$ fonksiyonu varsa $F(x) + c$ fonksiyonuna $f(x)$ in **ters türevi** veya **belirsiz integrali** denir ve $\int f(x)dx = F(x) + c$ şeklinde gösterilir. Bu gösterimde $\int$ sembolüne **integral işareti** ve c gerçek sayısına da **integral sabiti** denir. f fonksiyonu da integrali alınan fonksiyonu göstermektedir.

$\int f(x)\,dx$ integralindeki dx ifadesine **integralin diferansiyeli** denir ve integralin x değişkenine göre alındığını gösterir. Bu durumda $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + c$ olur.

Örneğin $f(x) = 2x$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun ters türevi bir fonksiyon ailesi oluşturur. Sabit terimlerin türevi sıfır olduğundan $c \in \mathbb{R}$ iken $x^2 + c$ türündeki tüm fonksiyonların türevi 2x e eşittir. Bu durum $F(x) = x^2 + c \Rightarrow F' = \frac{d}{dx}(x^2 + c) = 2x = f(x) \Rightarrow \int 2x\,dx = x^2 + c$ şeklinde gösterilir.

2. ÖRNEK

$\int 2\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

Belirsiz integral işlemini yapmak için integrali alınacak olan fonksiyonun ters türevi biliniyorsa bu fonksiyonun ters türevi yazılır. Sabit terimlerin yerine c sayısı eklenerek belirsiz integral hesaplanır.

$(2x)' = \frac{d}{dx}(2x) = 2$ olduğundan $\int 2\,dx = 2x + c$ olur.

3. ÖRNEK

$\int 3x^2\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(x^3)' = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$ olduğu bilindiğinden $\int 3x^2\,dx = x^3 + c$ bulunur.

Bilgi

Türevlenebilir bir f fonksiyonunun türevi $\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$ ise $d[f(x)]$ ifadesine **f fonksiyonunun diferansiyeli** denir ve $d[f(x)] = f'(x) \cdot dx$ olur.

4. ÖRNEK

$f(x) = 3x^2 + x - 1$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun diferansiyelini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = 3x^2 + x - 1$ eşitliğinin her iki tarafının x e göre türevi alınırsa

$\frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[3x^2 + x - 1]$

$\frac{d}{dx}[f(x)] = 6x + 1$ olur.

f fonksiyonunun diferansiyeli $d[f(x)] = (6x + 1)dx$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 1 — Bireysel Çalışma

1. Aşağıda fonksiyonların türevli olduğu aralıklarda diferansiyellerini bulunuz.

a) $f(x) = x^4 + 3x^2 - x$

b) $f(x) = 5x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x} - 4$

Bilgi

Bir fonksiyonun diferansiyelinin integrali bu fonksiyona sabit eklenerek bulunur. $c \in \mathbb{R}$, f sürekli ve türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $\int d\,f(x) = \int f'(x)dx = f(x) + c$ bulunur.

5. ÖRNEK

Aşağıdaki ifadelerin eşitini bulunuz.

a) $\int d(x^2 - x)$

b) $\int d(\sqrt[3]{x} - x^3)$

ÇÖZÜM

a) $\int d(x^2 - x) = x^2 - x + c$ bulunur.

b) $\int d(\sqrt[3]{x} - x^3) = \sqrt[3]{x} - x^3 + c$ bulunur.

Bilgi

Bir fonksiyonun integralinin türevi fonksiyonun kendisine eşittir. f sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$ yazılır.

6. ÖRNEK

Aşağıda verilen ifadelerin türevini bulunuz.

a) $\int (x^2 - 5)\,dx$ **b)** $\int \left(\frac{2}{t} - 3t^2\right)dt$

ÇÖZÜM

a) $\int (x^2 - 5)\,dx$ in türevi $\frac{d}{dx}\int (x^2 - 5)\,dx = x^2 - 5$ bulunur.

b) $\int \left(\frac{2}{t} - 3t^2\right)dt$ nin türevi $\frac{d}{dt}\int \left(\frac{2}{t} - 3t^2\right)dt = \frac{2}{t} - 3t^2$ bulunur.

7. ÖRNEK

$\int (x^2 \cdot f(x))\,dx = x^5 - x^3 + c$ olduğuna göre $f(2)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int (x^2 \cdot f(x))\,dx = x^5 - x^3 + c$$
$$\frac{d}{dx}\int (x^2 \cdot f(x))\,dx = \frac{d}{dx}(x^5 - x^3 + c)$$
$$x^2 \cdot f(x) = (x^5 - x^3 + c)'$$
$$x^2 \cdot f(x) = 5x^4 - 3x^2$$
$$f(x) = \frac{5x^4 - 3x^2}{x^2} = \frac{5x^4}{x^2} - \frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 5x^2 - 3 \text{ ise } f(2) = 5 \cdot 4 - 3 = 17 \text{ bulunur.}$$

Ders İçi Uygulama 2 — Bireysel Çalışma

1. $\frac{d}{dx}\left[\int (2 - 3x^2)\,dx\right]$ ifadesinin eşitini bulunuz.

2. $\int \left[\frac{d}{dx}(2\sqrt{x} - x)\right]dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

3. $\int (x \cdot f(x))\,dx = x^2 - 2\sqrt{x} + 1$ olduğuna göre $f(4)$ değerini bulunuz.

Temel İntegral Alma Kuralları

İntegral alma işleminde integrali alınacak olan ifadenin hangi fonksiyonun türevi olduğu biliniyorsa bu fonksiyona c integral sabiti eklenerek integral işlemi tamamlanır.

1. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\int a\,dx = ax + c$

8. ÖRNEK

$\int 3\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\int 3\,dx = 3x + c$ olur.

2. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \ (n \neq -1,\ n \in \mathbb{Q})$

9. ÖRNEK

$\int x^3\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\int x^3\,dx = \dfrac{x^{3+1}}{3+1} + c = \dfrac{x^4}{4} + c$ olur.

10. ÖRNEK

$\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c \text{ olur.}$$

Ders İçi Uygulama 3 — **Bireysel Çalışma**

Aşağıda verilen ifadelerin eşitini bulunuz.

a) $\int dx$

b) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$

Bir Fonksiyonun Sabit Bir Gerçek Sayı ile Çarpımının İntegrali

Bir fonksiyonun sabit bir gerçek sayı ile çarpımının integrali o fonksiyonun integralinin sabitle çarpımına eşittir.

Bilgi

f sürekli bir fonksiyon ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\int a\,f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$ olur.

11. ÖRNEK

Aşağıda verilen ifadelerin eşitini bulunuz.

a) $\int 3x^3\,dx$ **b)** $\int \sqrt{2}\,t\,dt$ **c)** $\int 4x^2y^3\,dy$

ÇÖZÜM

a) $\int 3x^3\,dx = 3 \cdot \int x^3\,dx = 3 \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = 3 \cdot \frac{x^4}{4} + c = \frac{3x^4}{4} + c$ olur.

b) $\int \sqrt{2}\,t\,dt = \sqrt{2} \int t\,dt = \sqrt{2} \cdot \frac{t^{1+1}}{1+1} + c = \sqrt{2} \cdot \frac{t^2}{2} + c = \frac{\sqrt{2}\,t^2}{2} + c$ olur.

c) $\int 4x^2y^3\,dy = 4x^2 \int y^3\,dy = 4x^2 \frac{y^{3+1}}{3+1} + c = x^2y^4 + c$ olur.

Ders İçi Uygulama 4 — **Bireysel Çalışma**

Aşağıda verilen ifadelerin eşitini bulunuz.

a) $\int \frac{4}{x^5}\,dx$ **b)** $\int \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx$

c) $\int \frac{3xt^2}{4}\,dt$ **ç)** $\int \frac{5\sqrt[3]{x}}{6\sqrt{x}}\,dx + \int 3\sqrt{x}\,dx$

İki Fonksiyonun Toplamının veya Farkının İntegrali

İki fonksiyonun toplamının veya farkının integrali bu fonksiyonların integrallerinin toplamına veya farkına eşittir.

Bilgi

f ve g sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ ve $\int [a \cdot f(x) \pm b \cdot g(x)]dx = a\int f(x)dx \pm b\int g(x)dx$ olur.

12. ÖRNEK

Aşağıda verilen ifadelerin eşitini bulunuz.

a) $\int [x + (x-1)^2]dx$

b) $\int \left(3x^2 + \frac{4}{x^3} - 2\sqrt{x}\right)dx$

ÇÖZÜM

a) $\int [x + (x-1)^2]dx = \int [x + (x^2 - 2x + 1)]dx$

$= \int (x^2 - x + 1)dx$

$= \int x^2 dx - \int x\,dx + \int 1dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c$ bulunur.

b) $\int \left(3x^2 + \frac{4}{x^3} - 2\sqrt{x}\right)dx = 3\int x^2 dx + 4\int x^{-3}dx - 2\int x^{\frac{1}{2}}dx$

$= \cancel{3} \cdot \frac{x^3}{\cancel{3}} + \cancel{4} \cdot \frac{x^{-2}}{-\cancel{2}} - 2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$

$= x^3 - 2x^{-2} - \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c$

$= x^3 - \frac{2}{x^2} - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + c \Rightarrow x^3 - \frac{2}{x^2} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + c$ bulunur.

13. ÖRNEK

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$ ve $f(0) = 1$ olduğuna göre $f(1)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\int f'(x)dx = \int (3x^2 + 2x - 1)dx$

$f(x) = \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} + \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} - x + c \Rightarrow f(x) = x^3 + x^2 - x + c$ olur.

$f(0) = 1$ olduğundan $f(0) = 0^3 + 0^2 - 0 + c = 1 \Rightarrow 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1$ bulunur.

$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ olarak elde edilir ve $f(1) = 1^3 + 1^2 - 1 + 1 = 2$ bulunur.

14. ÖRNEK

$\int 2xf(x)dx + \int x^2 f'(x)dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\int 2xf(x)dx + \int x^2f'(x)dx = \int (2xf(x) + x^2f'(x))dx = \int (x^2f(x))'dx = x^2f(x) + c$ olur.

15. ÖRNEK

Yamaçtan yuvarlanan bir kayanın zamana bağlı hızı $v(t) = 56 - 8t$ dir. Kaya 7. saniyede durmakta ve kayanın aldığı yol $x(t) = \int v(t)dt$ ifadesine eşit olduğuna göre kayanın durduğu ana kadar kaç metre yol aldığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$x(t) = \int v(t)dt = \int (56 - 8t)dt = 56t - 8\frac{t^2}{2} = 56t - 4t^2 + c$ olur.

Kayanın 7 saniyede aldığı toplam yol $x(7) - x(0) = (56 \cdot 7 - 4 \cdot 7^2 + c) - c = 196$ m'dir.

Ders İçi Uygulama 5 — Bireysel Çalışma

1. Grafiği $A(-1, 2)$ noktasından geçen bir f fonksiyonunun türevi $f'(x) = 2x + 1$ olduğuna göre $f(3)$ değerini bulunuz.

2. Yerden fırlatılan bir roketin zamana bağlı hızı $f(t) = 80 - 10t$ m/sn. fonksiyonu ile ifade ediliyor. Roketin t. saniyedeki yüksekliği $h(t) = \int f(t)dt$ ifadesine eşit olduğuna göre roketin çıktığı maksimum yüksekliğin kaç metre olduğunu bulunuz.

3. $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ ve $f(1) = 2$ ise $f(0)$ değerini bulunuz.

ALIŞTIRMALAR 6.1

1. Aşağıda verilen ifadelerin eşitlerini bulunuz.

a) $\int \left[\frac{d}{dx}(x^2+5)\right]dx$

b) $\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{4}+\frac{4}{x^2}+4\right)\right]dx$

c) $\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x^3}\right)\right]dx$

2. Aşağıda verilen ifadelerin türevlerini bulunuz.

a) $\int (x^2+5)\,dx$

b) $\int \left(\frac{x}{4}+\frac{4}{x^2}+4\right)dx$

c) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x^3}\right)dx$

3. Grafiği $A(1, 2)$ ve $B(2, k)$ noktalarından geçen bir f fonksiyonunun türevi $f'(x) = x + 3$ tür.

Buna göre k değerini bulunuz.

4. $\int x\,f(x)\,dx = 6x^2 + 4x^3 + 8$ **olduğuna göre** $f'(-2)$ **değerini bulunuz.**

5. $x^2 \cdot \int f(x)\,dx = 10x^4 + 3x^2$ **ise** $f(1)$ **değerini bulunuz.**

6. Aşağıda verilen ifadelerin eşitini bulunuz.

a) $\int [(x+1)\cdot\sqrt{x}\,]\,dx$

b) $\int d(2x)$

c) $\int x\,d(x^2+3)$

ç) $\int \left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)dx$

7. $\int x\,d(x^2-1) = f(x) + c$ **ise** f' **fonksiyonunu bulunuz.**

8. $f(x) = \int (2x+a)\,dx$ **ve** $f'(1) = 4$ **olduğuna göre** $f(3)$ **değerini bulunuz.**

9. $\int f(x-1)\,dx = x^2 + 3x + a$ **ise f fonksiyonunu bulunuz.**

10. $f'(x) = 4x^3 + 4x + 10$ **ve** $f(1) = 10$ **ise** $f(2)$ **değerini bulunuz.**

Değişken Değiştirme Yöntemi

İntegral alma kurallarının uygulanmasının zor olduğu integrallerde değişken değiştirme yöntemi kullanılır ve daha basit integrallere dönüştürülerek çözüm kolaylaştırılır. f ve g sürekli, türevlenebilen fonksiyonlar; $n \neq 0$, $n \neq -1$ ve $n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx$ biçiminde verilen bir integralde $f(x) = u$ dönüşümü yapılır. Her iki tarafın diferansiyeli alınarak $f'(x)\,dx = du$ elde edilir. Bulunan dönüşüm ve diferansiyel, yerine yazılarak integral $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx = \int u^n\,du$ biçimine dönüştürülür. İntegral alınıp u yerine $f(x)$ yazılarak $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx = \int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ bulunur.

16. ÖRNEK

$\int (x+1)^4\,dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$x + 1 = u$ dönüşümü yapılarak her iki tarafın diferansiyeli alınırsa

$$x + 1 = u$$
$$d(x+1) = d(u)$$
$$dx = du \text{ bulunur.}$$

Bulunan ifadeler integralde yerine yazılırsa

u yerine $x + 1$ yazılırsa

$$\int \underbrace{(x+1)}_{u}{}^4 \underbrace{dx}_{du} = \int u^4\,du = \frac{u^5}{5} + c = \frac{(x+1)^5}{5} + c \text{ bulunur.}$$

17. ÖRNEK

$\int (x^2-4)^6 \cdot 2x\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$u = x^2 - 4$ dönüşümü yapılarak $du = 2x\,dx$ bulunur. Bulunan ifadeler integralde yerine yazılırsa

$$\int (x^2-4)^6 \cdot \underbrace{2x\,dx}_{du} = \int u^6\,du = \frac{u^7}{7} + c$$
$$= \frac{(x^2-4)^7}{7} + c \text{ bulunur.}$$

18. ÖRNEK

$\int (x+1)\cdot\sqrt[3]{(x+1)}\,dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

Verilen integralde $x + 1 = u^3$ dönüşümü uygulanırsa $\sqrt[3]{x+1} = u$ ve $dx = 3u^2\,du$ olur.
Bulunan ifadeler integralde yerine yazılırsa

$$\int (x+1)\cdot\sqrt[3]{(x+1)}\,dx = \int u^3\cdot\sqrt[3]{u^3}\,3u^2\,du$$
$$= 3\int u^6 \cdot du$$
$$= 3\cdot\frac{u^7}{7} + c = 3\cdot\frac{(\sqrt[3]{x+1})^7}{7} + c \text{ bulunur.}$$

19. ÖRNEK

f gerçek sayılarda sürekli ve integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere $\int \frac{f'(x)}{f^5(x)}dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = u$ dönüşümü yapılarak $f'(x)dx = du$ bulunur.
Bulunan ifadeler integralde yerine yazılırsa

$\int \frac{f'(x)}{f^5(x)}dx = \int \frac{du}{u^5} = \int u^{-5}du = \frac{u^{-4}}{-4} + c = \frac{-1}{4f^4(x)} + c$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 6 — Bireysel Çalışma

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int (x\sqrt{x+1})dx$

b) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^4}$

c) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$

ç) $\int (3x+3)\sqrt[3]{x^2+2x+3}\,dx$

2. $\int \sqrt{f(x)+1}\cdot f'(x)dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

3. $\int \frac{d(2x^4)}{(x^4+1)^3}$ ifadesinin değerini bulunuz.

1. $\int (2x+1)(x^2+x-6)\,dx$ **ifadesinin eşitini bulunuz.**

2. $\int \frac{3\,dx}{(x+3)^2}$ **ifadesinin eşitini bulunuz.**

3. $\int \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ **ifadesinin eşitini bulunuz.**

4. Aşağıdaki ifadelerin eşitini bulunuz.

a) $\int (\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})\,dx$

b) $\int \frac{\sqrt[3]{x+2}+2}{\sqrt[3]{x+2}}\,dx$

c) $\int \left(\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}\right)dx$

5. $\int \sqrt{x+2}\cdot\sqrt[3]{x+2}\,dx$ **ifadesinin eşitini bulunuz.**

6. $\int 4\cdot\sqrt{9x^2+2x^4}\,dx$ **ifadesinin eşitini bulunuz.**

7. $f(x)=\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+1)^2}\,dx$ ve $f(-1)=0$ **olduğuna göre** $f(1)$ **değerini bulunuz.**

8. $\int \sqrt[3]{(2-x)}\,d(x^2-4)$ **ifadesinin eşitini bulunuz.**

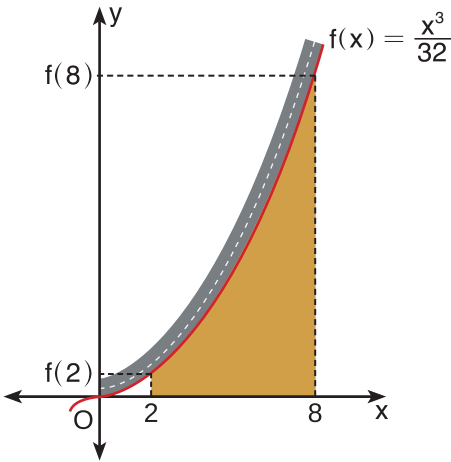
6.2. BELİRLİ İNTEGRAL VE UYGULAMALARI

Terimler ve Kavramlar

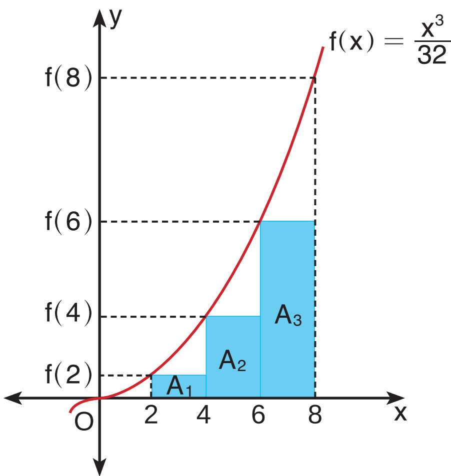
- **Riemann Toplamı**
- **Belirli İntegral**

Riemann Toplamı

Aşağıda yol kenarındaki bir arsanın üstten görünümü modellenmiştir. Yol $f(x)=\frac{x^3}{32}$ fonksiyonu ile ifade edilmiştir. Fonksiyonun grafiği, $x=2$, $x=8$ doğruları ve x ekseni arasında kalan alan düzgün bir geometrik şekil olmadığı için bu alanın yaklaşık değeri, bölge dikdörtgensel bölgelere ayrılarak hesaplanır.



Yanda $[2, 8]$ ndaki taralı bölge aşağıdaki gibi eşit parçalara bölünüp dikdörtgenlere ayrılır ve bu dikdörtgenlerin alanları toplanır.

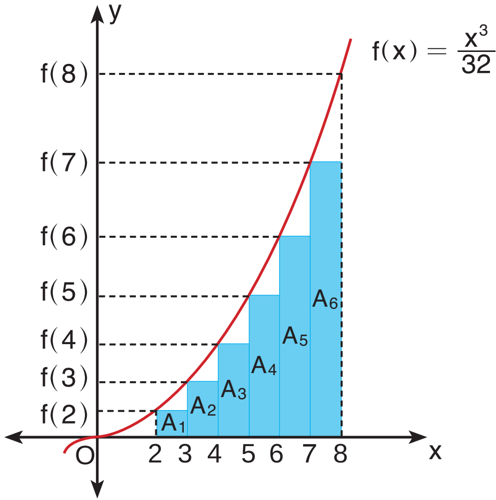


x ekseni, $x=2$, $x=8$ ve fonksiyon grafiği arasında kalan bölgede kenar uzunluğu 2 birim olan dikdörtgenlerin alanları toplamı

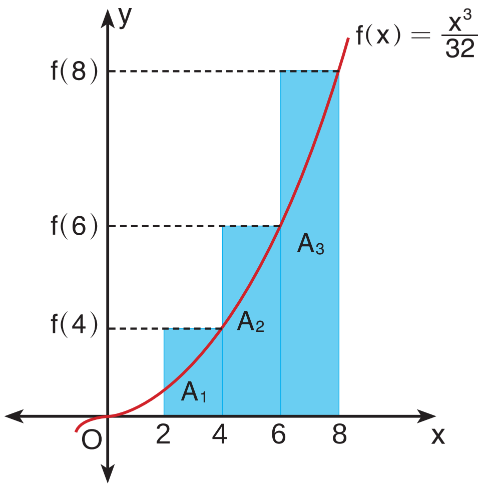
$$\begin{aligned} A_1+A_2+A_3 &= 2\cdot f(2)+2\cdot f(4)+2\cdot f(6) \\ &= 2\cdot\frac{2^3}{32}+2\cdot\frac{4^3}{32}+2\cdot\frac{6^3}{32} \\ &= 18 \text{ birimkare bulunur. (I)} \end{aligned}$$

x ekseni üzerindeki kenar uzunlukları 2 birim yerine 1 birim alınırsa diktörtgenlerin alanları toplamı

$$\begin{aligned} A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6 &= 1\cdot f(2)+1\cdot f(3)+1\cdot f(4)+1\cdot f(5)+1\cdot f(6)+1\cdot f(7) \\ &= 1\cdot\frac{2^3}{32}+1\cdot\frac{3^3}{32}+1\cdot\frac{4^3}{32}+1\cdot\frac{5^3}{32}+1\cdot\frac{6^3}{32}+1\cdot\frac{7^3}{32} \\ &\cong 24{,}47 \text{ birimkare olur. (II)} \end{aligned}$$



(II) de elde edilen sonuç, istenen alanın değerine (I) de hesaplanan sonuçtan daha yakındır. Eğer dikdörtgenlerin kenar uzunlukları daha da küçültülürse elde edilen dikdörtgenlerin alanlarının toplam değeri istenen alana daha da yakın olacaktır.



İstenen alan $[2, 8]$ nda yandaki gibi taban uzunlukları eşit olan üç farklı dikdörtgen kullanılarak da hesaplanabilir. Bu dikdörtgenlerin alanları toplanarak taralı alanın yaklaşık değeri hesaplanır. x ekseni üzerinde ve kenar uzunluğu 2 birim olan dikdörtgenlerin alanları toplamı

$$A_1 + A_2 + A_3 = 2 \cdot f(4) + 2 \cdot f(6) + 2 \cdot f(8)$$

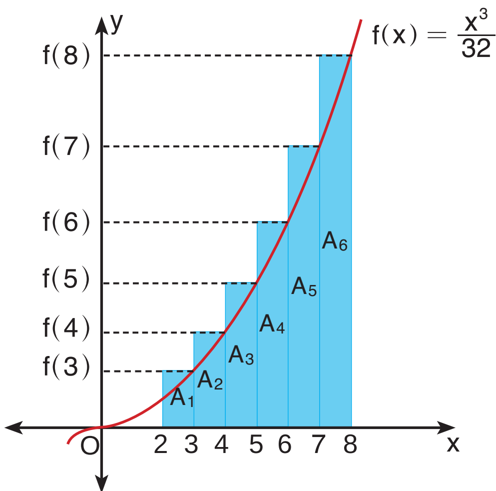
$$= 2 \cdot \frac{4^3}{32} + 2 \cdot \frac{6^3}{32} + 2 \cdot \frac{8^3}{32}$$

$= 49,5$ birimkare bulunur. (III)

x ekseni üzerindeki kenar uzunlukları 2 birim yerine 1 birim alınırsa dikdörtgenlerin alanları toplamı

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 1 \cdot f(3) + 1 \cdot f(4) + 1 \cdot f(5) + 1 \cdot f(6) + 1 \cdot f(7) + 1 \cdot f(8)$$

$\cong 40,22$ birimkare bulunur. (IV)



(IV) te hesaplanan sonuç, istenen alanın değerine (III) te hesaplanan sonuçtan daha yakındır.

Eğer dikdörtgenlerin taban uzunlukları daha da küçültülürse elde edilen dikdörtgenlerin alanları toplamının değeri istenen alana daha da yakın olacaktır.

Bilgi

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere $[a, b]$ nda, $x_0 = a$, $x_n = b$ ve
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ olacak şekilde parçalara ayrılarak elde edilen değerleri eleman kabul eden $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ kümesine $[a, b]$ **nın bir parçalanması veya bölüntüsü** denir. $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$ her birine **P parçalanmasının alt aralıkları** denir. P parçalanmasının uzunluğu Δx_k olmak üzere

$\Delta x_1 = |x_1 - x_0|$

$\Delta x_2 = |x_2 - x_1|$

$\vdots$

$\Delta x_n = |x_n - x_{n-1}|$ olur.

Eğer bu parçaların uzunlukları birbirine eşit ise **düzgün parçalanma veya düzgün bölüntü** denir. $[a, b]$ n tane eşit alt aralığa bölünürse her bir alt aralığın uzunluğu

$\Delta x = |x_1 - x_0| = |x_2 - x_1| = \cdots = |x_n - x_{n-1}| = \dfrac{b-a}{n}$ olur.

1. ÖRNEK

$f:[1, 3] \to \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun alt aralığının uzunluğu $\frac{1}{2}$ olacak şekilde bir P düzgün bölüntüsü bulunuz.

ÇÖZÜM

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

$\Delta x = \dfrac{3-1}{n}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{3-1}{n}$

$n = 4$ olur.

$[1, 3]$ dört eşit parçaya bölünerek P düzgün bölüntüsü (düzgün parçalanması)

$P = \left\{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}$ bulunur.

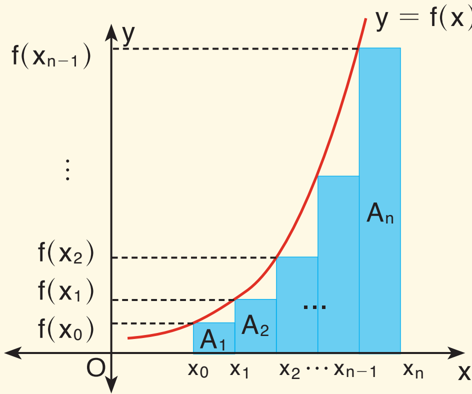
Ders İçi Uygulama 7

Bireysel Çalışma

$f:[0, 2] \to \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun alt aralığının uzunluğu $\frac{1}{4}$ olacak şekilde bir P düzgün bölüntüsü bulunuz.

Bilgi

$f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$, pozitif değerli bir polinom fonksiyon olmak üzere
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ olacak şekilde $[a, b]$ nın düzgün bölüntüsü
$P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ kümesi olsun. $\Delta x = |x_1 - x_0| = |x_2 - x_1| = \cdots = |x_n - x_{n-1}| = \frac{b-a}{n}$
olur. Fonksiyon grafiği, $x = a$, $x = b$ ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanının yaklaşık değeri, bölge dikdörtgensel bölgelere ayrılarak hesaplanır.

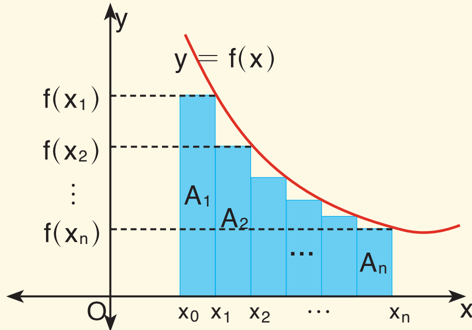


f artan ise fonksiyon grafiğinin altında kalan dikdörtgenlerin alanı

$A_1 = f(x_0) \cdot \Delta x$
$A_2 = f(x_1) \cdot \Delta x$
$\vdots$
$A_n = f(x_{n-1}) \cdot \Delta x$ olur.

$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ ifadesine

Riemann alt toplamı denir.



Benzer şekilde f azalan ise fonksiyon grafiğinin altında kalan dikdörtgenlerin alanı

$A_1 = f(x_1) \cdot \Delta x$
$A_2 = f(x_2) \cdot \Delta x$
$\vdots$
$A_n = f(x_n) \cdot \Delta x$ olur.

$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ ifadesine

Riemann alt toplamı denir.

2. ÖRNEK

$f:[0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ biçimindeki f fonksiyonu veriliyor. $[0, 2]$ nı dört eşit parçaya bölerek Riemann alt toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$[0, 2]$ dört eşit parçaya bölündüğünde her bir alt aralığın uzunluğu

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$ olur.

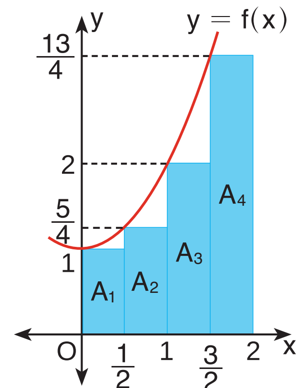
P düzgün bölüntüsü $P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ olur ve

$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[1, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ alt aralıkları elde edilir.

Bu aralıklarda Riemann alt toplam

$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{1}{2} \cdot f(0) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot f(1) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{3}{2}\right)$

$= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{4} = \frac{30}{8}$ bulunur.



3. ÖRNEK

$f:[1,\ 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x + 5$ biçiminde f fonksiyonu veriliyor. $[1,\ 4]$ nı üç eşit parçaya bölerek Riemann alt toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$[1,\ 4]$ 3 eşit parçaya bölündüğünde her bir alt aralığın uzunluğu

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{3} = 1$ olur.

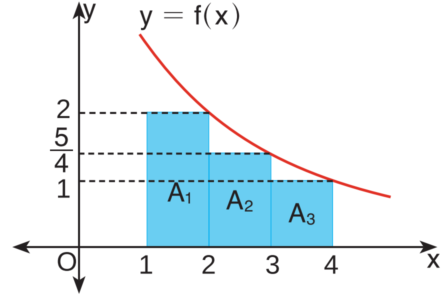
Düzgün P bölüntüsü $P = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ olur ve

$[1,\ 2],\ [2,\ 3],\ [3,\ 4]$ alt aralıkları elde edilir.

Bu aralıklarda Riemann alt toplam

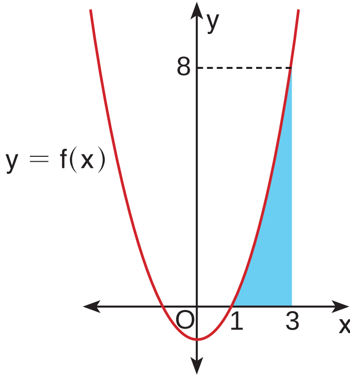
$A_1 + A_2 + A_3 = 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3) + 1 \cdot f(4)$

$= 1 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{5}{4} + 1 \cdot 1 = \frac{17}{4}$ bulunur.

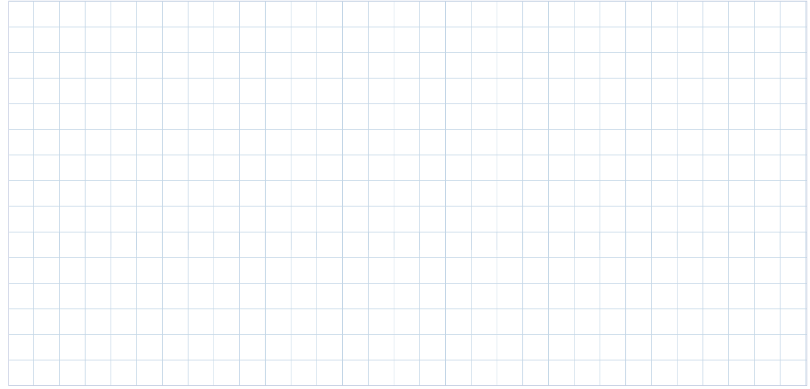


Ders İçi Uygulama 8 — Bireysel Çalışma

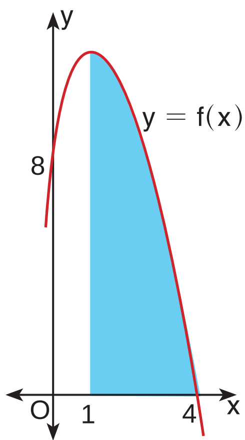
1.



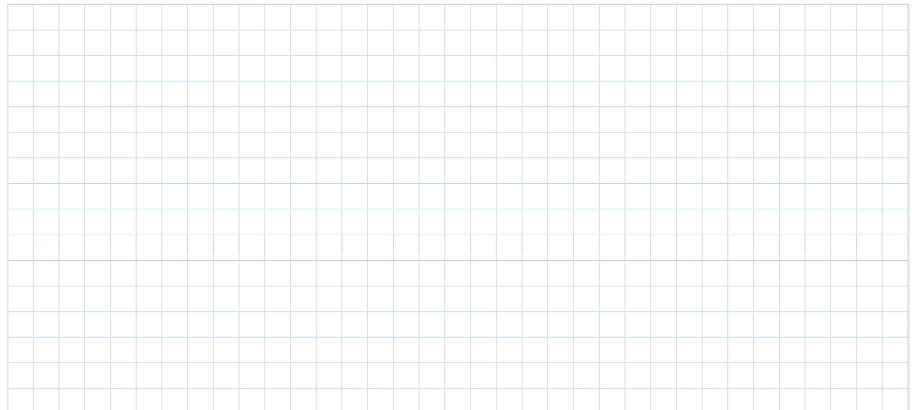
$f:[1,\ 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 1$ biçiminde f fonksiyonu veriliyor. $[1,\ 3]$ nı dört eşit parçaya bölerek Riemann alt toplamını bulunuz.



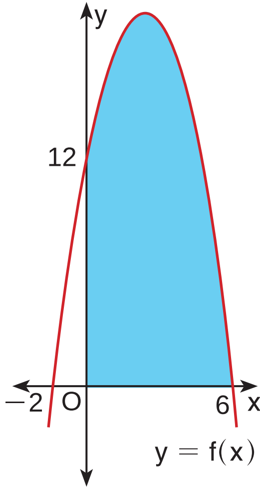
2.



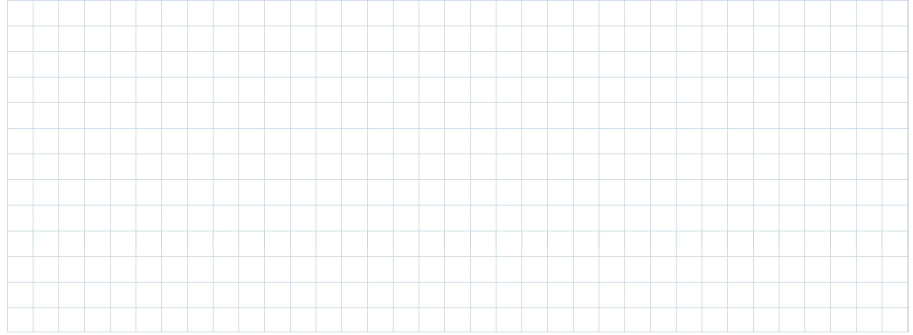
$f:[1,\ 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 2x + 8$ biçiminde f fonksiyonu veriliyor. $[1,\ 4]$ nı üç eşit parçaya bölerek Riemann alt toplamını bulunuz.



3.

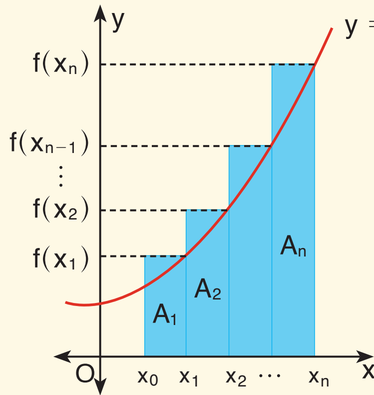


Yandaki grafikte bir havuzun üstten görünümü analitik düzlemde $f:[0, 6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x + 12$ fonksiyonu ile modellenmiştir. Buna göre havuzun taban alanınının yaklaşık değerini Riemann alt toplamı ile tabanı altı eşit parçaya bölerek hesaplayınız.



Bilgi

$f:[a, b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ pozitif değerli bir polinom fonksiyon olmak üzere $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ olacak şekilde $[a, b]$ nın düzgün bölüntüsü $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ kümesi olsun. $\Delta x = |x_1 - x_0| = |x_2 - x_1| = \cdots = |x_n - x_{n-1}| = \dfrac{b-a}{n}$ olur. Fonksiyon grafiği, $x = a$, $x = b$ ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanının yaklaşık değeri, bölge dikdörtgensel bölgelere ayrılarak hesaplanır.



f artan bir fonksiyon ise oluşan dikdörtgenlerin alanı

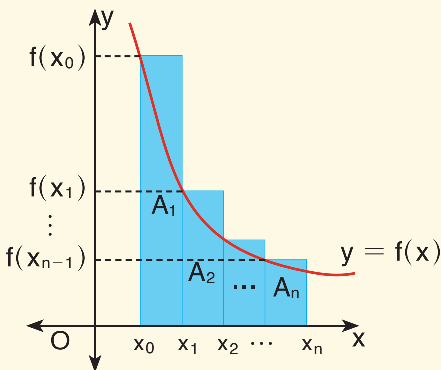
$A_1 = f(x_1) \cdot \Delta x$

$A_2 = f(x_2) \cdot \Delta x$

$\vdots$

$A_n = f(x_n) \cdot \Delta x$ olur.

Buradan $\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ ifadesine **Riemann üst toplamı** denir.



Benzer şekilde f azalan bir fonksiyon ise oluşan dikdörtgenlerin alanı

$A_1 = f(x_0) \cdot \Delta x$

$A_2 = f(x_1) \cdot \Delta x$

$\vdots$

$A_n = f(x_{n-1}) \cdot \Delta x$ olur.

Buradan $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ ifadesine **Riemann üst toplamı** denir.

4. ÖRNEK

$f:[0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{9} + 1$ biçiminde f fonksiyonu veriliyor.

$[0, 3]$ nı üç eşit parçaya bölerek Riemann üst toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$[0, 3]$ üç eşit parçaya bölündüğünde her bir alt aralığın uzunluğu $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{3} = 1$ olur. Bu durumda P düzgün bölüntüsü $P = \{0, 1, 2, 3\}$ olur. $[0, 1]$, $[1, 2]$ ve $[2, 3]$ alt aralıkları elde edilir. Bu aralıklarda Riemann üst toplamı

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3)$$
$$= 1 \cdot \left(\frac{1^3}{9} + 1\right) + 1 \cdot \left(\frac{2^3}{9} + 1\right) + 1 \cdot \left(\frac{3^3}{9} + 1\right)$$
$$= 7 \text{ bulunur.}$$

5. ÖRNEK

$f:[1, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 3$ biçiminde f fonksiyonu veriliyor. $[1, 4]$ nı üç eşit parçaya bölerek Riemann üst toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$[1, 4]$ üç eşit parçaya bölündüğünde her bir alt aralığın uzunluğu $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{3} = 1$ olur. Bu durumda P düzgün bölüntüsü $P = \{1, 2, 3, 4\}$ olur. Buradan $[1, 2]$, $[2, 3]$ ve $[3, 4]$ alt aralıkları elde edilir.
Bu aralıklarda Riemann üst toplamı

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3)$$
$$= 1 \cdot \frac{13}{4} + 1 \cdot 3 + 1 \cdot \frac{9}{4}$$
$$= \frac{17}{2} \text{ bulunur.}$$

Ders İçi Uygulama 9

Bireysel Çalışma

1. $f:[1, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ biçiminde f fonksiyonu veriliyor. $[1, 4]$ nı üç eşit parçaya bölerek Riemann üst toplamını bulunuz.

Bilgi

$f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ pozitif değerli ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ olacak şekilde $[a, b]$ nın düzgün bölüntüsü $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ kümesi olsun. $\Delta x = |x_1 - x_0| = |x_2 - x_1| = \cdots = |x_n - x_{n-1}| = \dfrac{b-a}{n}$ olur. $x_{k-1} < t_k < x_k$ olmak üzere fonksiyon grafiği, $x = a$, $x = b$ ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanının yaklaşık değeri, bölge dikdörtgensel bölgelere ayrılarak hesaplanır.

Fonksiyon grafiğinin altında kalan dikdörtgenlerin alanı

$A_1 = f(t_1) \cdot \Delta x$

$A_2 = f(t_2) \cdot \Delta x$

$\vdots$

$A_n = f(t_n) \cdot \Delta x$ olur.

$\sum\limits_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ ifadesine **Riemann toplamı** denir.

6. ÖRNEK

$f:[0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ biçiminde f fonksiyonu veriliyor. $[0, 2]$ nı dört eşit parçaya bölerek $x_{k-1} < t_k < x_k$ ve $t_k = \dfrac{x_{k-1} + x_k}{2}$ olacak şekilde Riemann toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\Delta x = \dfrac{2-0}{4} = \dfrac{1}{2}$ ve $P = \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}, 2\right\}$ olur.

$t_0 = \dfrac{0 + \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$, $t_1 = \dfrac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \dfrac{3}{4}$,

$t_2 = \dfrac{1 + \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{5}{4}$ ve $t_3 = \dfrac{\frac{3}{2} + 2}{2} = \dfrac{7}{4}$ bulunur.

$$\text{Riemann toplamı} = \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{7}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{41}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{65}{16}$$

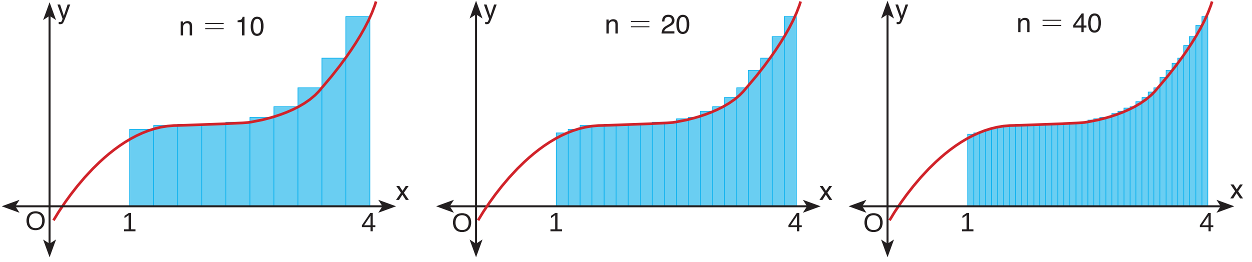
$$= \frac{17 + 25 + 41 + 65}{32} = \frac{148}{32} = \frac{37}{8} \text{ olur.}$$

Ders İçi Uygulama 10 — Bireysel Çalışma

$f:[1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$ biçiminde f fonksiyonu veriliyor. $[1, 4]$ nı üç eşit parçaya bölerek $x_{k-1} < t_k < x_k$ ve $t_k = \dfrac{x_{k-1} + x_k}{2}$ olacak şekilde Riemann toplamını bulunuz.

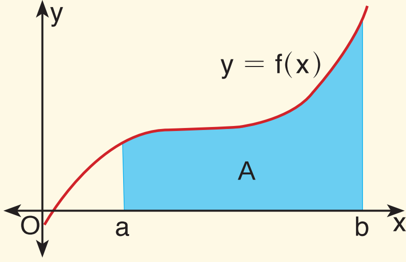
Belirli İntegral

f pozitif değerli ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere Riemann alt toplamında, Riemann üst toplamında veya Riemann toplamında f fonksiyonunun tanımlı olduğu $[a, b]$ n parçaya bölünsün. n değeri arttıkça dikdörtgenlerin kenar uzunluğu küçülerek 0 a yaklaşır. Riemann toplamı fonksiyon altında kalan alanın gerçek değerine yaklaşır. $n \to \infty$ için bu toplamların limit değeri alanın gerçek değerini verir.



Bilgi

$\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = A$ ise A değerine **f fonksiyonunun** $[a, b]$ **ndaki belirli integrali** denir ve $\int_a^b f(x)\,dx = A$ şeklinde gösterilir.



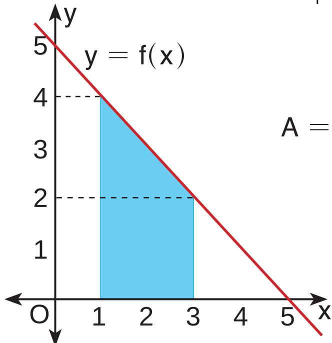
$\int_a^b f(x)dx$ gösteriminde a değerine **integralin alt sınırı**, b değerine de **üst sınırı** denir. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan alan ise $A = \int_a^b f(x)\,dx$ şeklinde hesaplanır. Bu durumda yandaki grafikteki gibi düzgün olmayan bölgelerin alanlarının gerçek değerini bulmak için belirli integral kullanılır.

7. ÖRNEK

$\int_1^3 (5 - x)\,dx$ belirli integralinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$[1, 3]$ nda $f(x) = 5 - x$ fonksiyonunun grafiği, $x = 1$, $x = 3$ ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanı A birimkare ise $A = \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (5 - x)\,dx$ ifadesinin değerine eşittir.



$$A = \int_1^3 f(x)\,dx = \frac{(2 + 4) \cdot 2}{2} = 6 \text{ bulunur.}$$

Ders İçi Uygulama 11

Bireysel Çalışma

1. $\int_{3}^{5}(2x-4)\,dx$ belirli integralinin değerini bulunuz.

2. $\int_{-3}^{3}(-x+4)\,dx$ belirli integralinin değerini bulunuz.

3.

y

$f(x)=\dfrac{-x^2+50x}{20}$

O

50 cm

x

Bir deri parçasının üst kenarı, analitik düzlemde $f(x)=\dfrac{-x^2+50x}{20}$ fonksiyonu ile modellenmektedir. Ayakkabı imalatçısı Hüseyin Usta'nın yaptığı ayakkabılarda 5 cm genişliğinde dikdörtgen şeklinde deri parçaları kullanması gerekmektedir.

Buna göre

a) Hüseyin Usta'nın bu deriden en fazla kaç cm^2 lik dikdörtgen parçalar çıkarabileceğini bulunuz.

b) Hüseyin Usta'nın çıkardığı deri parçalarını uç uca eklediğinde oluşan şerit şeklindeki derinin toplam uzunluğunu bulunuz.

Ders İçi Uygulama 12 Teknoloji

Dinamik matematik programında $f(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ fonksiyonunun $[0, 2]$ ndaki Riemann alt toplamını, Riemann üst toplamını ve Riemann toplamını bulmak için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. Adım: Giriş kısmına $\mathbf{\frac{x^2}{2} + 1}$ yazılarak f fonksiyonunun grafiği çizilir.

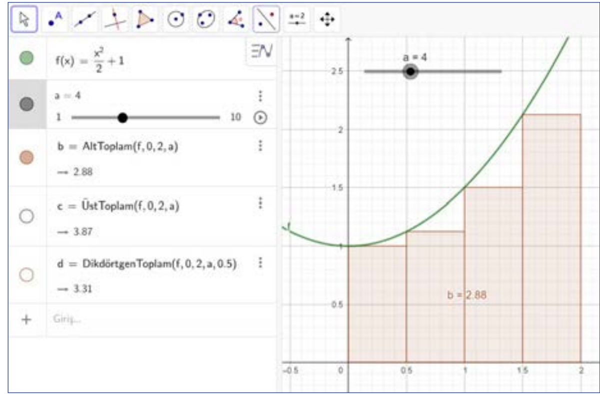
2. Adım: Sürgü aracı seçildikten sonra grafik alanının boş bir yerine tıklanarak bir sürgü oluşturulur ve değerler **a=4, Min: 1, Maks: 10, Artış: 1** olarak ayarlanır.

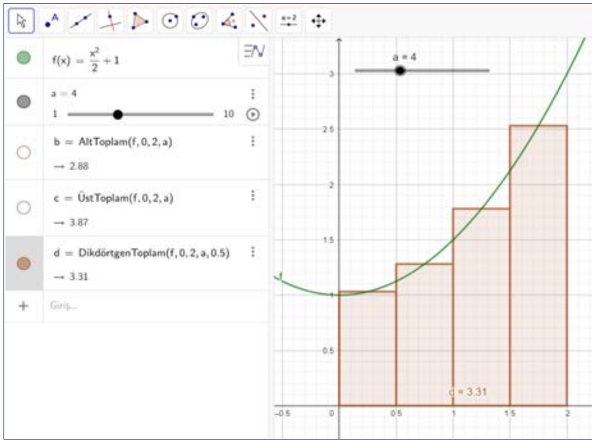
3. Adım: Giriş kısmına **AltToplam(f,0,2,a)** yazılarak f fonksiyonunun $[0, 2]$ ndaki Riemann alt toplamı hesaplanır.

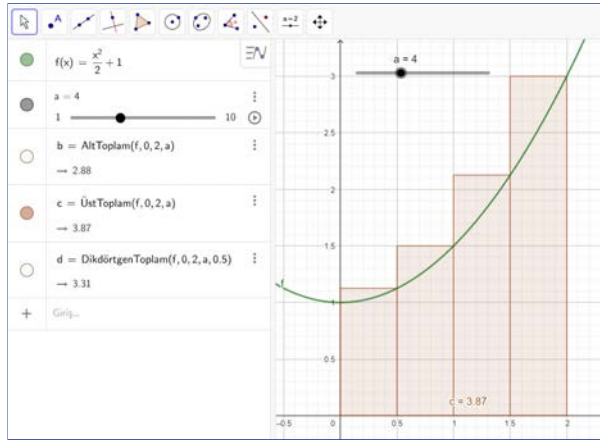
4. Adım: Giriş kısmına **ÜstToplam(f,0,2,a)** yazılarak f fonksiyonunun $[0, 2]$ ndaki Riemann üst toplamı hesaplanır.

5. Adım: Giriş kısmına **DikdörtgenToplam(f,0,2,a,0.5)** yazılarak f fonksiyonunun $[0, 2]$ ndaki Riemann toplamı hesaplanır.

6. Adım: Sürgünün değeri (dikdörtgen sayısı) değiştirilerek bulunan Riemann toplamları karşılaştırılır.







Yukarıdaki örneğe göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Rieman alt toplamı, Riemann üst toplamı ve Riemann toplamını sıralayınız.

2. Dikdörtgen sayısının daha da artırılması durumunda elde edilen toplamlar arasındaki farkın azalma sebebini açıklayınız.

ALIŞTIRMALAR 6.3

1. Aşağıda $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **tanımlı fonksiyonların yanlarında verilen aralıklarda d eşit parçalı Riemann alt toplamını, Riemann üst toplamını ve Riemann toplamını bulunuz.**

a) $f(x) = 6 - x,\ A = [2,5],\ d = 6$

b) $f(x) = 9 - x^2,\ A = [-2,2],\ d = 8$

2. $f:[0,\ 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = 16 - x^2$ **şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun** $[0,\ 4]$ **nda 4 eşit parçalı bölüntüsünü oluşturarak bu bölüntüye göre x ekseni ile arasında kalan bölgenin Riemann alt toplamını, Riemann üst toplamını ve Riemann toplamını bularak sıralayınız.**

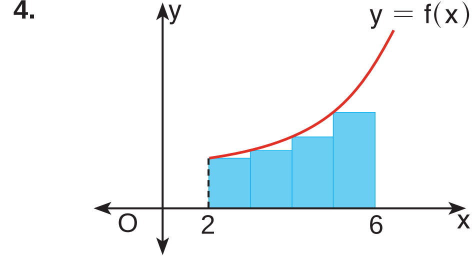
3. Aşağıda verilen belirli integrallerin değerini bulunuz.

a) $\int_{-5}^{0} (x + 5)\,dx$

b) $\int_{0}^{1} (6 - 3x)\,dx$

c) $\int_{-2}^{0} (x + 2)\,dx + \int_{0}^{3} (3 - x)\,dx$

4.

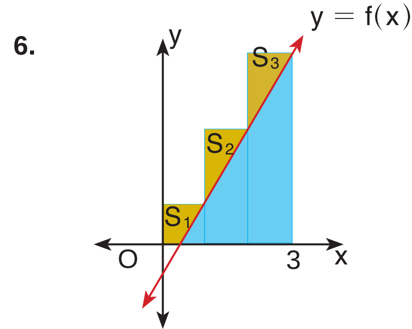


Yukarıda verilen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2}{4} - x + 5$ fonksiyonu ile $[2,\ 6]$ nda kalan bölge kenar uzunluğu 1 birim olan dikdörtgensel bölgelere ayrılmıştır.

Buna göre dikdörtgenlerin alanları toplamını bulunuz.

5. $f(x) = 2x + 3$ **fonksiyonunun** $[0,\ 3]$ **nda 6 eşit parçalı Riemann üst toplamı A, x ekseni arasında kalan bölgenin alanı B olduğuna göre** $|B - A|$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

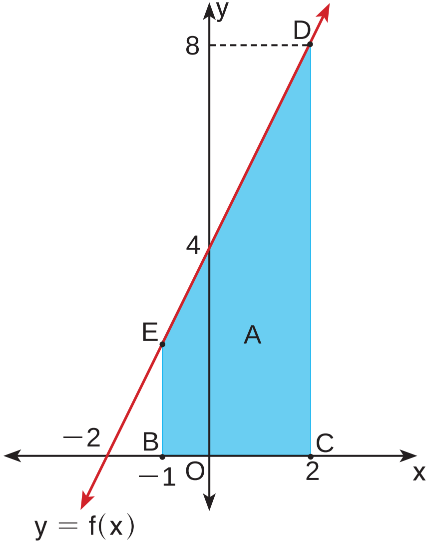
6.



Yukarıda verilen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 1$ fonksiyonu ile $[0,\ 3]$ nda kalan bölge kenar uzunluğu 1 birim olan dikdörtgensel bölgelere ayrılmıştır.

f fonksiyonunun grafiğinin üzerinde kalan alanlar $S_1,\ S_2$ ve S_3 **olmak üzere** $S_1 + S_2 + S_3$ **toplamını bulunuz.**

Bir Fonksiyonun Belirli ve Belirsiz İntegralleri Arasındaki İlişki



Yanda $f(x) = 2x + 4$ fonksiyonun grafiği verilmiştir. f fonksiyonun grafiği, $x = -1$, $x = 2$ ve x ekseni ile sınırlı bölgenin alanı mavi bölge ile oluşan yamuğun alanına eşittir.

$$A = \int_{-1}^{2} (2x + 4)\,dx = A(BCDE)$$

$$= \frac{(f(2) + f(-1))(2 - (-1))}{2}$$

$$= \frac{(8 + 2)(2 - (-1))}{2} = 15 \text{ bulunur. (I)}$$

f fonksiyonunun integrali F olmak üzere

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (2x + 4)\,dx$$

$$= 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x + c = x^2 + 4x + c \text{ olur.}$$

$$F(2) - F(-1) = (2^2 + 4 \cdot 2 + c) - ((-1)^2 + 4 \cdot (-1) + c)$$

$$= (12 + c) - (-3 + c)$$

$$= 12 + c + 3 - c = 15 \text{ olur. (II)}$$

(I) ve (II) den $A = \int_{-1}^{2} (2x + 4)\,dx = F(2) - F(-1)$ elde edilir.

Bilgi

f fonksiyonu $[a, b]$ nda integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Her $x \in (a, b)$ için $F'(x) = f(x)$ olacak şekilde sürekli bir $F:[a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa integralin alt sınırı a, integralin üst sınırı b olmak üzere $\int_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a)$ olur.

Belirli integralde c sabitleri sadeleştiğinden c sabiti bulunmaz. Belirli integral hesaplanırken belirsiz integral alma kuralları aynen uygulanır.

8. ÖRNEK

$\int_{1}^{3} (2x + 3)dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int_{1}^{3} (2x + 3)dx = (x^2 + 3x)\Big|_{1}^{3} = (3^2 + 3 \cdot 3) - (1^2 + 3 \cdot 1) = 18 - 4 = 14 \text{ bulunur.}$$

9. ÖRNEK

$\int_{2}^{7} \sqrt{x + 2}\,dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x + 2 = u$ dönüşümü yapılır ve her iki tarafın diferansiyeli alınırsa $x + 2 = u \Rightarrow dx = du$ olur.
Sınırlar ise
$x = 2 \Rightarrow 2 + 2 = u \Rightarrow u = 4$
$x = 7 \Rightarrow 7 + 2 = u \Rightarrow u = 9$ bulunur.

$$\int_2^7 \sqrt{x+2}\,dx = \int_4^9 \sqrt{u}\,du = \int_4^9 u^{\frac{1}{2}}\,du = \left.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_4^9 = \left.\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right|_4^9$$
$$= \frac{2}{3}\left(9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(3^{2\cdot\frac{3}{2}} - 2^{2\cdot\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(3^3 - 2^3\right) = \frac{38}{3} \text{ olur.}$$

10. ÖRNEK

$\int_{-1}^{1} (x^3 - x)\,dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int_{-1}^{1} (x^3 - x)\,dx = \left.\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\right|_{-1}^{1} = \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2}\right) = 0 \text{ bulunur.}$$

11. ÖRNEK

$\int_{-1}^{0} \left(\frac{x^3 - 1}{x - 1}\right)dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int_{-1}^{0} \left(\frac{x^3 - 1}{x - 1}\right)dx = \int_{-1}^{0} \left(\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\right)dx$$
$$= \int_{-1}^{0} (x^2 + x + 1)\,dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)\right|_{-1}^{0}$$
$$= 0 - \left(\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + (-1)\right) = -\left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{6} \text{ bulunur.}$$

12. ÖRNEK

$\int_{1}^{3} (x^2 - x)^3 (2x - 1)\,dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 - x = u$ dönüşümü yapılır. İntegral u ya bağlı olur.
Sınırlar da u ya bağlı olarak değiştirilir.
$x^2 - x = u \Rightarrow (2x - 1)\,dx = du$ ve
$x = 3 \Rightarrow 3^2 - 3 = u \Rightarrow u = 6$
$x = 1 \Rightarrow 1^2 - 1 = u \Rightarrow u = 0$ olur.

$$\int_{1}^{3} \underbrace{(x^2 - x)^3}_{u}\underbrace{(2x - 1)\,dx}_{du} = \int_{0}^{6} u^3\,du = \left.\frac{u^4}{4}\right|_0^6 = \frac{6^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 324 \text{ bulunur.}$$

13. ÖRNEK

$\int_{-2}^{2} f'(x)\,dx = 5$ ve $f(2) = 3$ ise $f(-2)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\int_{-2}^{2} f'(x)\,dx = 5$ ise

$f(x)\Big|_{-2}^{2} = f(2) - f(-2) = 5$

$3 - f(-2) = 5 \Rightarrow f(-2) = -2$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 13

Bireysel Çalışma

1. Aşağıdaki ifadelerin değerini bulunuz.

a) $\int_{1}^{2} (x^2 + x + 1)dx$

b) $\int_{0}^{4} \left(\frac{3\sqrt{x}}{2} + 1\right)dx$

c) $\int_{1}^{8} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$

ç) $\int_{-2}^{2} (x^2 + 1)^3 \cdot x\,dx$

2. $\int_{-1}^{1} f'(x)dx = 2$ ve $f(1) + f(-1) = 4$ ise $\frac{f(1)}{f(-1)}$ değerini bulunuz.

Belirli İntegralin Özellikleri

f ve g fonksiyonları $[a, b]$ nda integrallenebilir iki fonksiyon ve $F'(x) = f(x)$ ve $G'(x) = g(x)$ olmak üzere

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$ ise $\int_a^a f(x)dx = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0$ bulunur.

14. ÖRNEK

$\int_3^3 (3 - x^2)\,dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$ olduğundan $\int_3^3 (3 - x^2)\,dx = F(3) - F(3) = 0$ bulunur.

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ ise

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)dx$ bulunur.

15. ÖRNEK

$\int_2^5 (x^3 - 1)dx + \int_5^2 (x^3 - 1)dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ olduğundan

$\int_2^5 (x^3 - 1)dx + \int_5^2 (x^3 - 1)dx = \int_2^5 (x^3 - 1)dx + \left(-\int_2^5 (x^3 - 1)dx\right) = 0$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 14 — Bireysel Çalışma

Asağıdaki ifadelerin değerini bulunuz.

a) $\int_4^4 \left(\frac{x^5 + 3x^4 - 1}{x^2 + 1}\right)dx$

b) $\int_1^3 \left(\frac{x^3 - x - 1}{x + 1}\right)dx + \int_3^1 \left(\frac{x^3 - x - 1}{x + 1}\right)dx$

3. $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$ bulunur.

16. ÖRNEK

$\int_1^3 2 \cdot f(x)dx = 5$ olduğuna göre $\int_3^1 4 \cdot f(x)dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int_1^3 2 \cdot f(x)dx = 5 \Rightarrow 2 \cdot \int_1^3 f(x)dx = 5 \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = \frac{5}{2} \text{ olur.}$$

$$\int_3^1 4 \cdot f(x)dx = 4 \cdot \int_3^1 f(x)dx$$

$$= -4 \cdot \int_1^3 f(x)dx = -4 \cdot \frac{5}{2} = -10 \text{ bulunur.}$$

4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ bulunur.

17. ÖRNEK

$\int_1^4 \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int_1^4 \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^4 2xdx + \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$= \int_1^4 2xdx + \int_1^4 \frac{x^{\frac{-1}{2}}}{2}dx$$

$$= \left(\cancel{2} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}}\right)\Bigg|_1^4 + \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}}\right)\Bigg|_1^4 = (x^2)\Big|_1^4 + (\sqrt{x})\Big|_1^4 = (16 - 1) + (2 - 1) = 16 \text{ olur.}$$

Ders İçi Uygulama 15

Bireysel Çalışma

$\int_3^1 (3 + f(x))\, dx = 2$ olduğuna göre $\int_1^3 f(x)\, dx$ değerini bulunuz.

5. a, b, c ∈ ℝ ve a < c < b olmak üzere $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$

$\int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a)$ ve $\int_c^b f(x)\,dx = F(b) - F(c)$ olduğuna göre

$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \cancel{F(c)} - F(a) + F(b) - \cancel{F(c)} \Rightarrow F(b) - F(a) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ bulunur.

18. ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leqslant 2 \text{ ise} \\ 3, & 2 < x \leqslant 4 \text{ ise} \\ 3\sqrt{x}, & 4 < x \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $\int_1^9 f(x)dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Parçalı fonksiyonun kritik noktaları, $x = 2$ ve $x = 4$ e göre integralin sınırları belirlenirse

$$\int_1^9 f(x)dx = \int_1^2 2xdx + \int_2^4 3dx + \int_4^9 3\sqrt{x}\,dx$$

$$= \int_1^2 2xdx + \int_2^4 3dx + \int_4^9 3x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \left(\cancel{2} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}}\right)\Big|_1^2 + (3x)\Big|_2^4 + \left(\cancel{3} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{\cancel{3}}{2}}\right)\Bigg|_4^9$$

$$= x^2\Big|_1^2 + 3x\Big|_2^4 + 2x^{\frac{3}{2}}\Big|_4^9$$

$$= (4 - 1) + (12 - 6) + (54 - 16) = 3 + 6 + 38 = 47 \text{ bulunur.}$$

19. ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x > 2 \text{ ise} \\ x^3 - k, & x \leq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için $\int_{-1}^3 f(x)\,dx = \frac{16}{3}$ olduğuna göre k değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int_{-1}^3 f(x)\,dx = \int_{-1}^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^2 (x^3 - k)\,dx + \int_2^3 (x^2 - 1)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - kx\right)\Big|_{-1}^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_2^3$$

$$= \left((4 - 2k) - \left(\frac{1}{4} + k\right)\right) + \left((9 - 3) - \left(\frac{8}{3} - 2\right)\right)$$

$$= \left(-3k + \frac{15}{4}\right) + \frac{16}{3} = \frac{16}{3} \Rightarrow k = \frac{5}{4} \text{ bulunur.}$$

20. ÖRNEK

$\int_{1}^{3} |x-2|dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$|x-2|$ fonksiyonu parçalı fonksiyon olarak ifade edilirse $|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \text{ ise} \\ -x+2, & x \leq 2 \text{ ise} \end{cases}$ olur.

$$\int_{1}^{3} |x-2|dx = \int_{1}^{2} (-x+2)dx + \int_{2}^{3} (x-2)dx = \left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_2^3$$

$$= \left((-2+4)-\left(-\frac{1}{2}+2\right)\right)+\left(\left(\frac{9}{2}-6\right)-(2-4)\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 \text{ bulunur.}$$

21. ÖRNEK

$a-b=3$ ve $\int_{a}^{b} (2x-3)dx = 0$ olduğuna göre $a \cdot b$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int_{a}^{b} (2x-3)dx = 0 \Rightarrow (x^2-3x)\Big|_a^b = 0 \Rightarrow (b^2-3b)-(a^2-3a) = 0$$

$$\Rightarrow (b^2-a^2)+(3a-3b) = 0$$

$$\Rightarrow (b-a)(b+a)+3(a-b) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(b-a)}_{-3}\underbrace{(b+a-3)}_{0} = 0 \text{ olur.}$$

O hâlde $b-a=-3$ ve $b+a=3$ bulunur.

$$\begin{array}{l} \;\; b - a = -3 \\ + \; b + a = 3 \\ \hline \;\; 2b = 0 \end{array}$$

$2b = 0 \Rightarrow b = 0$ ve $a = 3$ elde edilir. $a \cdot b = 3 \cdot 0 = 0$ olur.

Ders İçi Uygulama 16

Bireysel Çalışma

1. $f(x) = \begin{cases} a-x, & x < 1 \text{ ise} \\ bx^3, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu veriliyor. $\int_{-2}^{1} f(x)dx = \int_{1}^{3} f(x)dx$ olduğuna göre $b - \frac{3a}{20}$ ifadesinin değerini bulunuz.

2. $\int_{-3}^{2} |x+1|dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

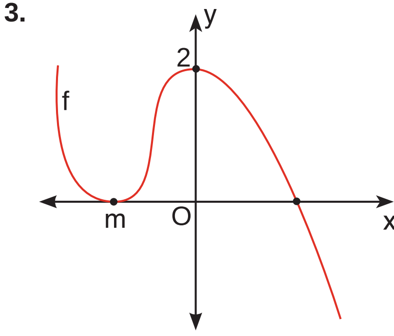
1. $a \neq b$ ve $\int_a^b x\,dx = \int_b^a dx$ **olduğuna göre**

$a + b$ **değerini bulunuz.**

2. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2$ **ve** $\int_{1}^{-1} x \cdot f'(x)\,dx = -5$

olduğuna göre $f(1) + f(-1)$ **değerini bulunuz.**

3.



f fonksiyonunun grafiği şekildeki gibidir.

Buna göre $\int_m^0 f'(x) \cdot f^2(x)\,dx$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

4. $f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < 0 \\ x^2 - 5x + 4, & 0 \leqslant x \end{cases}$ **olduğuna göre**

$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

5. $\int_{-3}^{1} |12 - 3x^2|\,dx$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

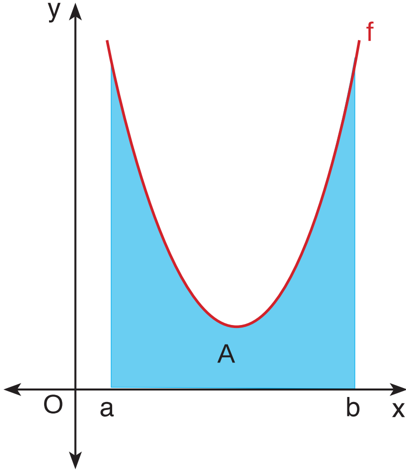
6. $\int_{-3}^{1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1}\,dx$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

7. $\int_{-1}^{1} (1 + x^5)^3 \cdot x^4\,dx$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

8. $\frac{d}{dx}\left[\int_{2020}^{2022} (\sqrt[7]{x^5} + 5x^4)\,dx\right]$ **değerini bulunuz.**

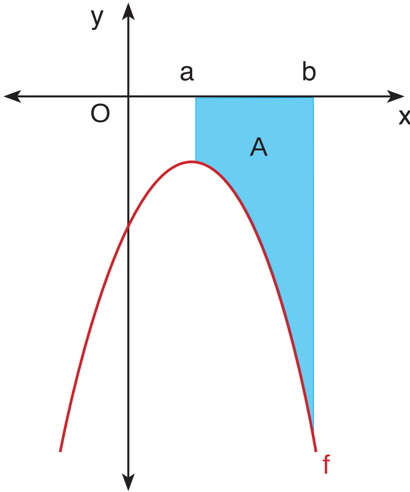
Belirli İntegral ile Alan Hesabı

Günlük yaşamda karşılaşılan bir çok nesne düzgün olmayan yüzeye sahiptir. Düzgün olmayan yüzeylerin alan veya hacimleri integral ile hesaplanır. Örneğin bir havuzun yüzey alanı, buzulun kapladığı alan veya bir gitarın ön yüzünün alanı integral kullanılarak hesaplanabilir.

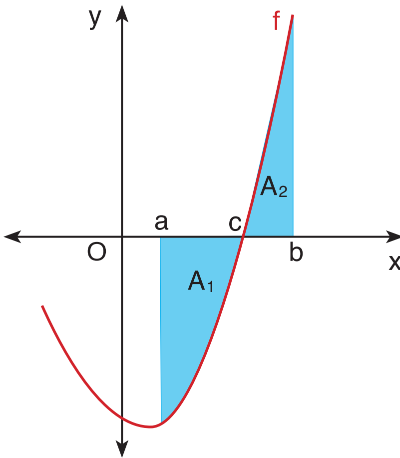


$f:[a, b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ sürekli integrallenebilir bir fonksiyon ve $f(x) > 0$ olsun. f fonksiyonunun grafiği, $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanı A birimkare ise

$A = \int_a^b f(x)dx$ şeklinde bulunur.



$f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu $f(x) < 0$ olsun. f fonksiyonunun grafiği, $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanı A birimkare ise $A = -\int_a^b f(x)dx$ şeklinde bulunur.



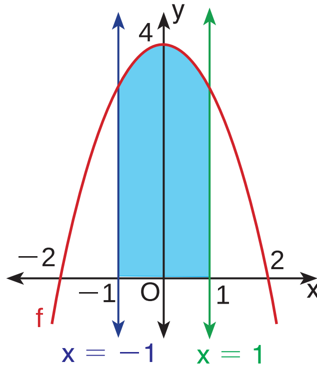
$f:[a, b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu olmak üzere $a < c < b$ ve her $x \in [a, c)$ için $f(x) < 0$, her $x \in (c, b]$ için $f(x) > 0$ olsun. f fonksiyonunun grafiği, $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanı A birimkare ise $A = A_1 + A_2 = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ olur. Buradan

$A = \int_a^b |f(x)|dx$ biçiminde bulunur.

22. ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - x^2$ biçimindeki f fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonunun grafiği, $x = -1$ ve $x = 1$ doğruları ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



f fonksiyonu ile $x = -1$ ve $x = 1$ doğrularının grafiği analitik düzlemde yandaki gibi çizildiğinde istenen taralı bölgenin alanı A birimkare ise

$$A = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} (4 - x^2)dx$$

$$= \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

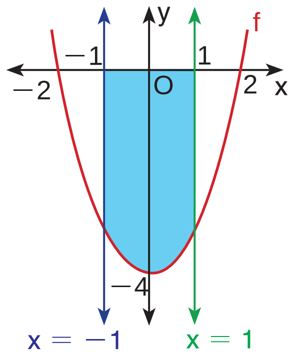
$$= \left(4 - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= 4 - \frac{1}{3} + 4 - \frac{1}{3} = 8 - \frac{2}{3} = \frac{22}{3} \text{ birimkare bulunur.}$$

23. ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$ biçimindeki f fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonunun grafiği, $x = -1$ ve $x = 1$ doğruları ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



f fonksiyonu ile $x = -1$ ve $x = 1$ doğrularının grafiği analitik düzlemde yandaki gibi çizildiğinde istenen taralı bölgenin alanı A birimkare ise

$$A = -\left[\int_{-1}^{1} f(x)dx\right] = -\left[\int_{-1}^{1} (x^2 - 4)dx\right]$$

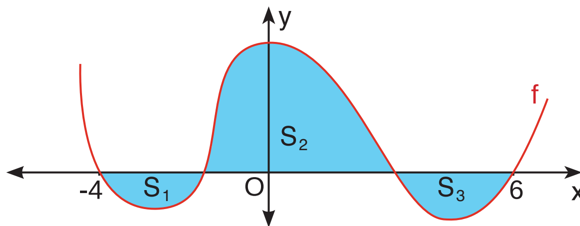
$$= -\left[\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_{-1}^{1}\right]$$

$$= -\left[\left(\frac{1}{3} - 4\right) - \left(-\frac{1}{3} + 4\right)\right]$$

$$= -\left[\frac{1}{3} - 4 + \frac{1}{3} - 4\right]$$

$$= -\left[\frac{2}{3} - 8\right] = -\left[-\frac{22}{3}\right] = \frac{22}{3} \text{ birimkare bulunur.}$$

24. ÖRNEK



Yanda gerçek sayılar kümesinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $S_1 = 4$ birimkare, $S_2 = 6$ birimkare, $S_3 = 2$ birimkare ise

$\int_{-4}^{6} f(x)dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Grafikte S_1 ve S_3 alanları x ekseninin altında kaldığı için

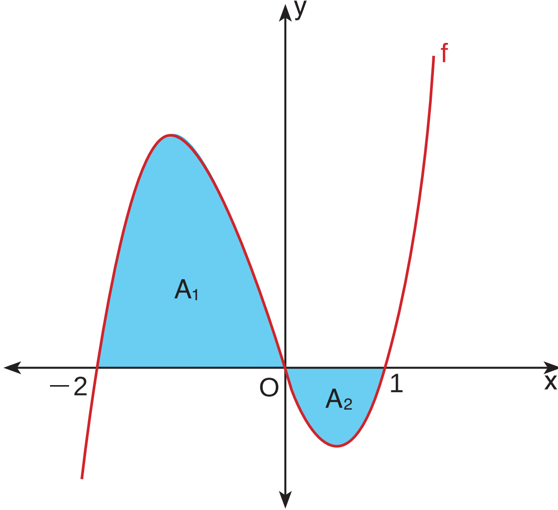
$$\int_{-4}^{6} f(x)dx = -S_1 + S_2 - S_3 = -4 + 6 - 2 = 0 \text{ bulunur.}$$

25. ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ biçimindeki f fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Eğrinin x eksenini kestiği noktalar $y = x^3 + x^2 - 2x = 0$ için
$x \cdot (x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow x \cdot (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -2$ ve $x_3 = 1$ olur.
Eğrinin grafiği ile istenen alan aşağıdaki gibidir.



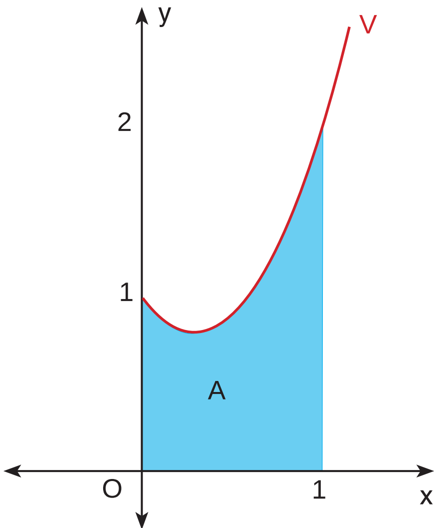
Buradan taralı bölgenin alanı A birimkare ise

$$A = A_1 + A_2$$
$$= \int_{-2}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{1} f(x)\,dx$$
$$= \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)\,dx - \int_{0}^{1} (x^3 + x^2 - 2x)\,dx$$
$$= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{-2}^{0} - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{0}^{1}$$
$$= \left[(0) - \left(\not{4} - \frac{8}{3} - \not{4}\right)\right] - \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) - (0)\right]$$
$$= \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} \text{ birimkare bulunur.}$$

26. ÖRNEK

Bir hareketlinin zamana göre hızının (m/sn.) değişimini ifade eden V fonksiyonu $V:[0,1] \to \mathbb{R},\ V(t) = t^3 + t^2 - t + 1$ biçiminde tanımlanmıştır. Buna göre bu hareketlinin 1 saniyede aldığı yolun kaç metre olduğunu bulunuz

ÇÖZÜM



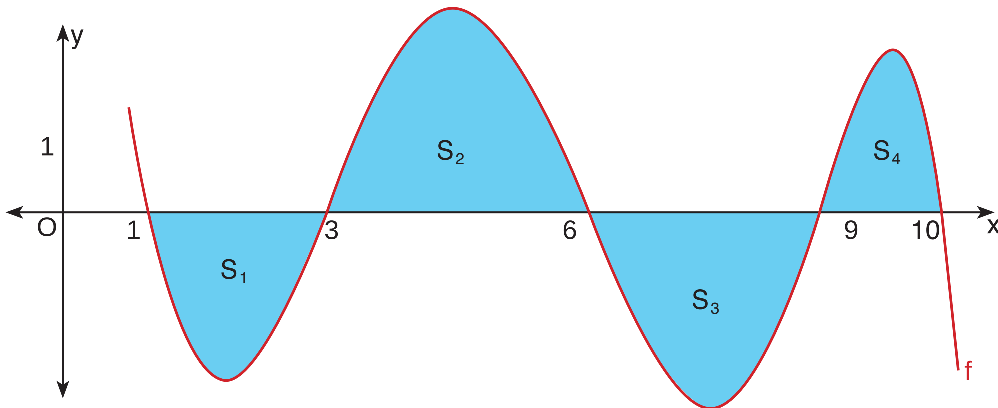
$[0, 1]$ nda eğrinin grafiği yandaki gibidir. Hareketlinin 1 saniyede aldığı yol $[0, 1]$ nda V fonksiyonunun grafiği ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanına eşittir. Bu alan A birimkare olmak üzere

$$A = \int_{0}^{1} V(t)\,dt$$
$$= \int_{0}^{1} (t^3 + t^2 - t + 1)\,dt$$
$$= \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t\right)\Big|_{0}^{1}$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1$$
$$= \frac{13}{12} \text{ birimkare bulunur.}$$

Ders İçi Uygulama 17 — Bireysel Çalışma

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ biçimindeki f fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonunun grafiği, $x = 1$ ve $x = 3$ doğruları ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ biçimindeki f fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonunun grafiği, $x = 0$ ve $x = 2$ doğruları ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.



3. Yukarıda gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $S_1 = 2$ birimkare, $S_2 = 5$ birimkare, $S_3 = 4$ birimkare ve $S_4 = 3$ birimkare ise $\int_{1}^{10} f(x)dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

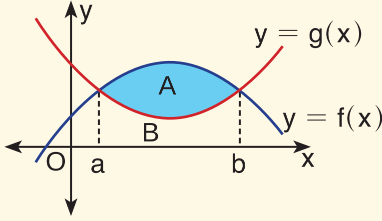
4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

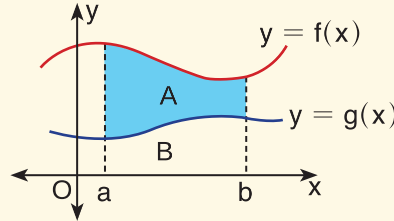
Bilgi

İki Eğri Arasında Kalan Alan

$f:[a, b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ ve $g:[a, b] \to \mathbb{R}$, $y = g(x)$ biçiminde tanımlı, sürekli ve integrallanebilen f ve g fonksiyonları verilsin.

a) Her $x \in [a, b]$ için $f(x) \geq g(x)$ olmak üzere f ve g fonksiyonlarının grafikleri, $x = a$ ve $x = b$ doğrularının arasında kalan bölgenin alanı aşağıdaki grafiklerde gösterildiği biçimde olsun.

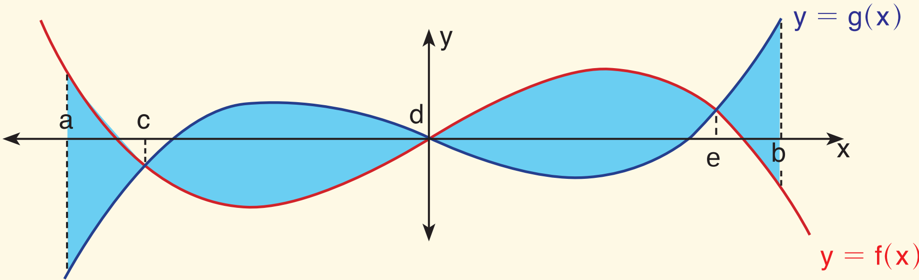




Bu durumda $[a, b]$ nda f fonksiyonunun altında kalan alan $A + B$ ve g fonksiyonunun altında kalan alan B olmak üzere iki eğri arasında kalan A bölgesinin alanı

$$A = (A + B) - (B) = \int_a^b f(x) - \int_a^b g(x) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \text{ olur.}$$

b) $[a, b]$ nda aşağıdaki grafikte verilen f ve g fonksiyonları ile $x = a$, $x = b$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı



$$A = \int_a^c [f(x) - g(x)]dx + \int_c^d [g(x) - f(x)]dx + \int_d^e [f(x) - g(x)]dx + \int_e^b [g(x) - f(x)]dx \text{ olur.}$$

27. ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ve $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 3x + 3$ biçiminde tanımlı f ve g fonksiyonları veriliyor. f ve g fonksiyonlarının grafikleri ile sınırlanan bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

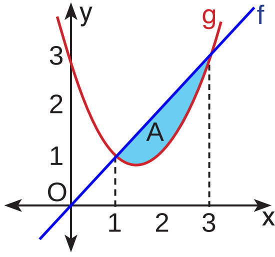
Her iki denklem ortak çözülürse fonksiyonların grafiklerinin kesim noktalarının apsisleri

$x^2 - 3x + 3 = x \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow (x - 1)(x - 3) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1$ ve $x_2 = 3$ bulunur.

Fonksiyonların grafikleri çizildiğinde istenen bölge aşağıdaki gibidir.



Fonksiyon grafiklerinin arasında kalan bölgenin alanı A birimkare ise kalan A bölgesinin alanı

$$A = \int_1^3 [f(x) - g(x)]dx = \int_1^3 [x - (x^2 - 3x + 3)]dx$$

$$= \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx = \left(\frac{-x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right)\Big|_1^3$$

$$= (-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \text{ birimkare bulunur.}$$

28. ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ ve $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$ biçiminde tanımlı f ve g fonksiyonları veriliyor. f ve g fonksiyonlarının grafikleri ile sınırlanan bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Her iki denklem ortak çözülürse fonksiyonların grafiklerinin kesim noktalarının apsisleri

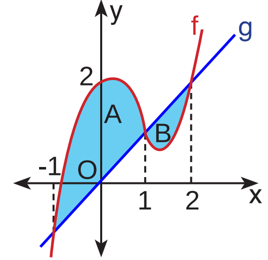
$x^3 - 2x^2 + 2 = x$

$\Rightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

$\Rightarrow x^2(x - 2) - (x - 2) = 0$

$\Rightarrow (x - 2)(x^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$ ve $x_3 = 2$ olur.



f ve g fonsiyonlarının grafikleri arasında kalan bölgelerin alanı, A birimkare ve B birimkare ise

$$A + B = \int_{-1}^{1} [(x^3 - 2x^2 + 2) - (x)]dx + \int_1^2 [(x) - (x^3 - 2x^2 + 2)]dx$$

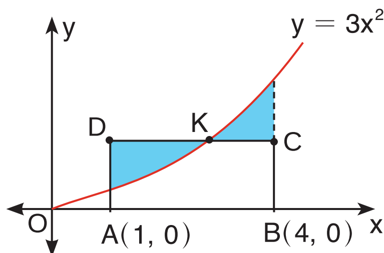
$$= \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - x + 2)dx + \int_1^2 (-x^3 + 2x^2 + x - 2)dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - 2\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-1}^{1} + \left(-\frac{x^4}{4} + 2\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_1^2$$

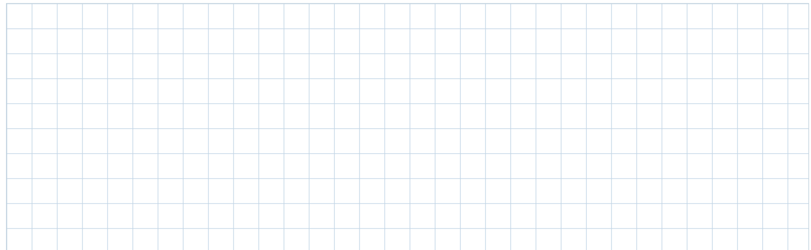
$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 2\right) + \left(-4 + \frac{16}{3} + 2 - 4\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2\right)$$

$$= \frac{13}{12} + \frac{19}{12} - \frac{8}{12} + \frac{13}{12} = \frac{37}{12} \text{ birimkare bulunur.}$$

Ders İçi Uygulama 18 — Bireysel Çalışma



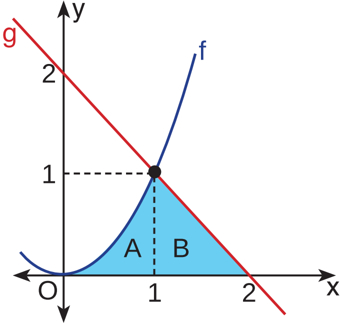
Şekilde $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2$ biçiminde tanımlı f fonksiyonunun grafiği ve ABCD dikdörtgeni verilmiştir. Taralı bölgelerin alanları eşit olduğuna göre K noktasının apsisini bulunuz.



29. ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2 - x$ biçiminde tanımlı f ve g fonksiyonları veriliyor. f, g fonksiyonlarının grafikleri ve x ekseni ile sınırlanan bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



f ve g fonksiyonların grafiklerinin ve x ekseninin sınırladığı bölgenin alanı A birimkare ve B birimkare olacak şekilde iki parçaya ayrılmıştır. f ve g fonksiyonların grafiklerinin kesim noktalarının apsisleri

$x^2 = 2 - x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ ve $x = 1$ olur.

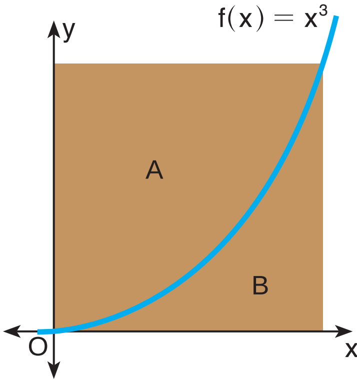
$x = 1$ ise $y = 1$ bulunur.

$$A = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$B = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$A + B = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \text{ bulunur.}$$

30. ÖRNEK

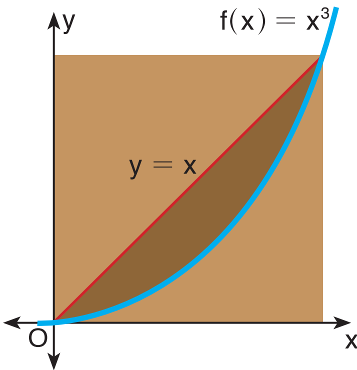


Yanda Asra ve Burak'a babalarından kalan kare şeklindeki tarlaları ve tarlaların içerisinden $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ biçiminde verilen f fonksiyonunun grafiği şeklinde geçen su kanalı modellenmiştir.

A bölgesini Asra, B bölgesini Burak almıştır. Asra fazla aldığı bölgenin ücretini tarlanın bedeli üzerinden Burak'a ödeyecektir.

Tarlanın bedeli 500 000 TL olduğuna göre Asra'nın Burak'a kaç TL ödemesi gerektiğini bulunuz.

ÇÖZÜM



Tarlanın bir kenar uzunluğu r birim alınırsa

$r = f(r) \Rightarrow r = r^3 \Rightarrow 0 = r^3 - r \Rightarrow 0 = r(r^2 - 1)$

$\Rightarrow r_1 = 0,\ r_2 = -1$ veya $r_3 = 1$ olur.

$r = 1$ birim bulunur.

Asra'nın fazladan aldığı bölgenin alanı

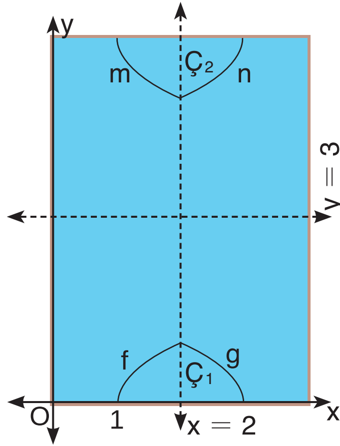
$$\int_0^1 (x - x^3)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - (0) = \frac{1}{4} \text{ birimkaredir.}$$

Tarlanın bedelinin $\frac{1}{4}$ ünü Asra'nın Burak'a ödemesi gerekir. Buradan

Asra'nın ödeyeceği tutar $500\,000 \cdot \frac{1}{4} = 125\,000$ TL bulunur.

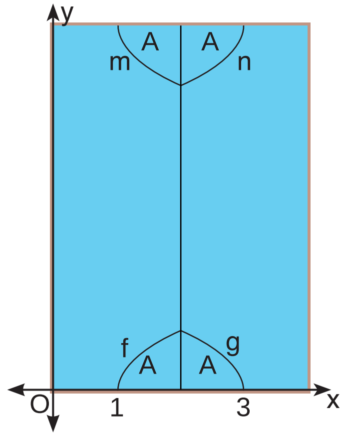
31. ÖRNEK



Yandaki şekilde eni 4 metre, boyu 6 metre olan bir havuzun üstten görünümü analitik düzlem üzerinde modellenmiştir.
Tanımlı olduğu aralıkta $f(x) = \sqrt{x-1}$ biçiminde verilen f fonksiyonunun $x = 2$ doğrusuna göre simetriği alınarak g fonksiyonunun, $y = 3$ doğrusuna göre simetriği alınarak m fonksiyonunun ve $(2, 3)$ noktasına göre simetriği alınarak n fonksiyonunun grafiği elde edilmiştir. f ve g fonksiyonlarının grafiği ile m ve n fonksiyonlarının grafiği arasında kalan bölgelere 1 metre derinliğinde $Ç_1$ ve $Ç_2$ çocuk havuzları yapılmıştır.

Çocuk havuzlarının dışında kalan bölgenin derinliği 2 metre olduğuna göre bu havuzu doldurmak için kaç metreküp suya ihtiyaç olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Çocuk havuzları olmasaydı havuzun tamamının hacmi $4 \cdot 6 \cdot 2 = 48$ metreküp olurdu. Çocuk havuzlarından $Ç_1$ in alanı 2A olduğundan $A = \int_1^2 \sqrt{x-1}\,dx$ bulunur.

Bu integralde $x - 1 = u^2$ dönüşümü uygulanırsa

$x - 1 = u^2 \Rightarrow dx = 2udu$

$x = 1 \Rightarrow u = 0$ ve $x = 2 \Rightarrow u = 1$ olur.

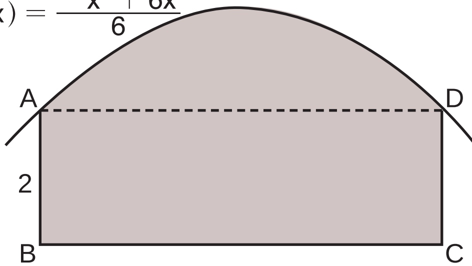
Bulunan değerler integralde yerine yazılırsa

$$A = \int_1^2 \sqrt{x-1}\,dx = \int_0^1 u \cdot 2udu = \int_0^1 2u^2du = \left(\frac{2u^3}{3}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right) - (0) = \frac{2}{3} \text{ metrekare bulunur.}$$

Havuzun hacmi $48 - 4 \cdot A \cdot 1 = 48 - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 48 - \frac{8}{3} = \frac{136}{3}$ metreküp bulunur.

Ders İçi Uygulama 19 — Bireysel Çalışma

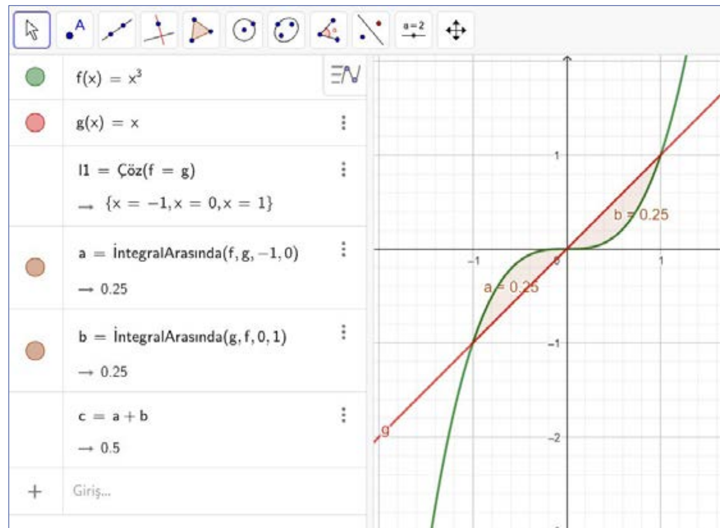


Yandaki şekilde ön duvarı 2 metre yüksekliğinde, dikdörtgen şeklinde ve çatısı uygun aralıklarda tanımlı $f(x) = \frac{-x^2 + 6x}{6}$ biçiminde verilen f fonksiyonunun grafiği ile belirlenen bir deponun önden görünümü modellenmiştir.
1 metrekare duvarın boya maliyeti 200 TL olduğuna göre bu deponun sadece ön yüzü için kaç liralık boya kullanılacağını bulunuz.

Ders İçi Uygulama 20 Teknoloji

Dinamik matematik programında $f(x) = x^3$ eğrisi ile $g(x) = x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulmak için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. Adım: Giriş kısmına ayrı ayrı **x³** ve **x** yazılarak f ile g fonksiyonlarının grafiği çizilir.
2. Adım: Giriş kısmına **Çöz(f=g)** yazılarak f ile g fonksiyonlarının kesim noktaları olan $\{-1, 0, 1\}$ noktaları bulunur.
3. Adım: Giriş kısmına ayrı ayrı **İntegralArasında(f,g,-1,0)** ve **İntegralArasında(g,f,0,1)** yazılarak eğri ile doğru arasında kalan a ile b alanları bulunur.
4. Adım: Giriş kısmına **a+b** yazılarak $[-1, 1]$ nda eğri ile doğru arasında kalan alan bulunur.



Yukarıdaki örneğe göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. $[-1, 1]$ nda $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

2. Taralı alanları $[-1, 0]$ için ayrı ve $[0, 1]$ için ayrı bulmak yerine tek seferde $[-1, 1]$ nda bulunuz. Bulduğunuz sonucun sebebini açıklayınız.

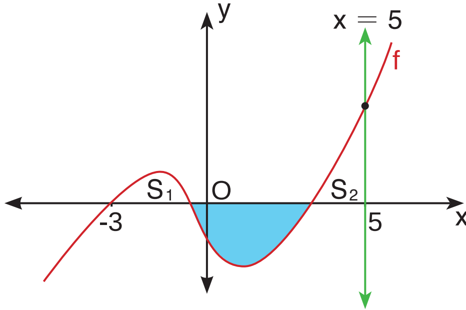
1. Yanlarında verilen aralıkta aşağıdaki eğri ve doğruların x ekseni ile arasında kalan alanların kaç birimkare olduğunu bulunuz.

a) $y = x^2 + 1, [-1, 2]$
b) $y = x^2 + x, [-1, 1]$
c) $y = x + 2, [1, 3]$
ç) $y = \sqrt{2x}, [0, 18]$

2. Aşağıda verilen eğrilerle sınırlanmış bölgelerin alanlarının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

a) $y = x^2 + 1$ ve $y = 3 - x^2$
b) $y = x^3$ ve $y = x^2$
c) $y = x^2$ ve $y = 1$
ç) $y = x^2 - 16$ ve $y = -3x^2$

3.

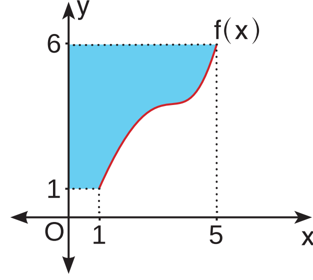


Yukarıdaki şekilde f fonksiyonu, $x = 5$ doğrusu ve x ekseni arasında kalan alanlar $S_1 = 13$ birimkare ve $S_2 = 20$ birimkaredir.

$\int_{-3}^{5} f(x)dx = 24$ **birimkare ise taralı alanın kaç birimkare olduğunu bulunuz.**

4. Tepe noktası (2, 0) olan ve (0, 8) noktasından geçen parabol ile eksenler arasında kalan bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

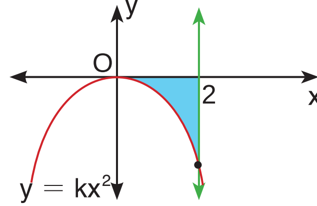
5.



Yukarıdaki şekilde $[1, 5]$ nda tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Taralı alan 12 birimkare olduğuna göre $\int_{1}^{5} f(x)dx$ **ifadesinin değerini hesaplayınız.**

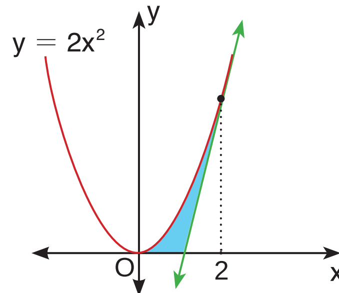
6.



Yukarıdaki şekilde taralı alan 12 birimkare olduğuna göre k değerini bulunuz.

7. $c > 0$ **olmak üzere** $y = -x^2 + c^2$ **eğrisi ile bu eğrinin orijine göre simetriği arasında kalan alan 576 cm² olduğuna göre c değerini bulunuz.**

8.



Şekildeki $y = 2x^2$ **parabolü,** $x = 2$ **noktasındaki teğet doğrusu ve x ekseni arasında kalan taralı bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.**

1-5. sorularda boş bırakılan yerleri uygun biçimde doldurunuz.

1. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = ...\sqrt[3]{x} + c$

2. $\int 3x^2 + ...x + ...dx = x^3 + 5x^2 + 7x - 1$

3. $\int \left[\frac{d}{dx}(5x+7)\right]dx = ...$

4. $\int_a^b f(x)dx$ integraline $x = a$, $x = b$ doğruları ile $f(x)$ eğrisi ve ...... ekseni arasında kalan

.... denir.

5. $f^3(x) = \int ....f^2(x)......dx$

Aşağıdaki taralı alanları verilen değerler ile eşleştiriniz.

6. a) $y = x^2 - 25$ (-5, O, 5, 6, 7, x, y)

b) $y = x^2 - 5x$ (O, 5, x, y)

c) $y = 6x^3$ (O, 4, x, y)

I. $\frac{52}{3}$ **II.** $\frac{125}{6}$ **III.** 192 **IV.** 384

7-25. çoktan seçmeli soruları cevaplayınız.

7. $\int x^{\pi}dx$ **ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $x^{\pi} + c$ B) $\frac{x^{\pi}}{\pi} + c$ C) $\frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} + c$

D) $\frac{x^{\pi+1}}{\pi} + c$ E) $x^{\pi} \cdot \ln\pi + c$

8. $\int x(2 - 5\sqrt{x})dx$ **ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{1}{5}x^{\frac{1}{2}} + c$ B) $x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + c$ C) $x^{\frac{3}{2}} + c$

D) $x^2(1 - 2\sqrt{x}) + c$ E) $\frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}} + c$

9. $\int \frac{x^3 - x}{x}dx$ **ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{x^3}{3} - x + c$

B) $3x^2 - x + c$

C) $x^3 - x + c$

D) $\frac{x^3}{3} + c$

E) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c$

10. $\int \frac{3x^2}{x - 1}dx - \int \frac{3}{x - 1}dx$ **ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $x^2 + x + c$

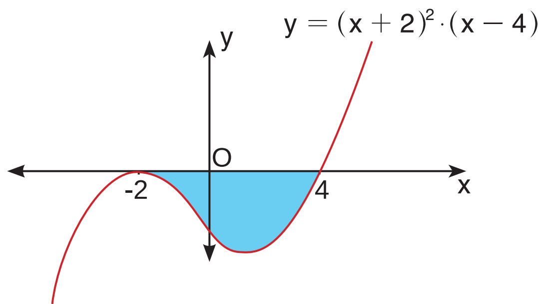
B) $3x^2 + 3x + c$

C) $\frac{3x^2}{2} + 3x + c$

D) $x^3 - x + c$

E) $x^3 + 3x + c$

11.



Yukarıdaki şekilde verilen grafiğe göre taralı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

A) $96\frac{1}{4}$ B) $98\frac{1}{4}$ C) $100\frac{1}{4}$

D) 108 E) $106\frac{1}{4}$

12. a bir gerçek sayı olmak üzere

$\int f(x - 1)dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + 3x + a$ **olduğuna göre** $f(x)$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x^3 - 2x + 1$

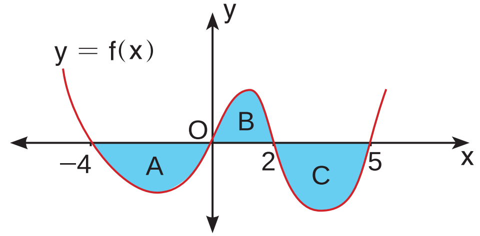
B) $x^3 + 3x + 1$

C) $x^2 - 3x + 1$

D) $x^3 + 2x + 1$

E) $x^3 - 3x - 1$

13.



Yukarıdaki şekilde x eksenini $-4, 0, 2, 5$ noktalarında kesen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Taralı bölgelerin alanları A, B, C birimkare olmak üzere $A = 4$ **birimkare,** $B = 1$ **birimkare ve** $\int_{-4}^{5} f(x)dx = -9$ **olduğuna göre** C **alanı kaç birimkaredir?**

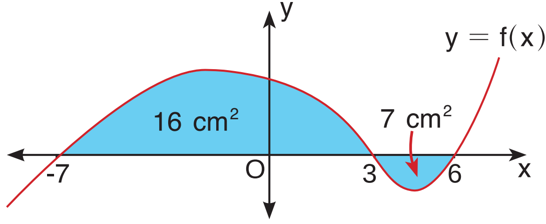
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

14. $\int_{0}^{\sqrt{3}} a.(a^2 + 3)^5 da$ **ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{7}{4} \cdot 3^7$ B) $\frac{7}{4} \cdot 3^6$ C) $\frac{7}{4} \cdot 3^5$

D) $\frac{7}{4} \cdot 3^4$ E) $\frac{7}{4}$

15.



Yukarıdaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

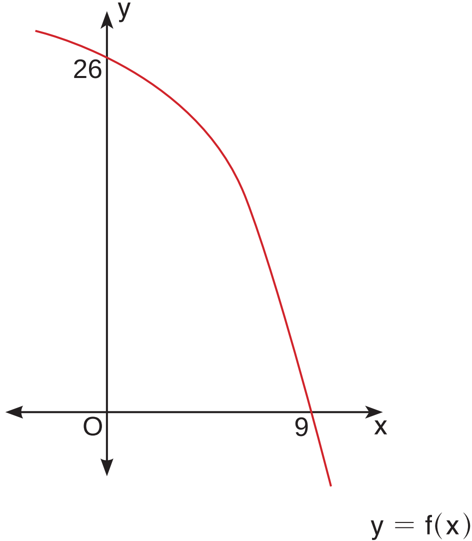
Buna göre $\int_{-7}^{6} f(x)dx$ değeri kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 12 E) 23

16. $\int_{3}^{4} \frac{d(x^2 - 4x)}{x - 2}$ **değeri kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 7 D) 10 E) 13

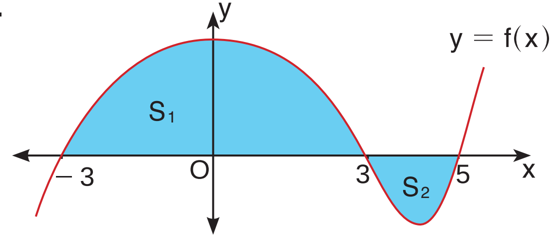
17.



Yukarıdaki şekilde grafiği verilen f fonksiyonu için $\int_{0}^{9} f'(x)dx$ değeri kaçtır?

A) −26 B) −9 C) 0 D) 9 E) 26

18.



Yukarıdaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$\int_{-3}^{5} |f(x)|dx = 40$ **ve** $\int_{3}^{5} f(x)dx = -12$ **olduğuna göre S_1 alanı kaç birimkaredir?**

A) 12 B) 24 C) 28 D) 40 E) 52

19. k gerçek sayı olmak üzere

$\int x \cdot f(x)dx = 7x^6 + 5x^4 + 3x + k$ **olduğuna göre $f(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $42x^4 + 20x^2 + \frac{3}{x}$

B) $42x^5 + 20x^3 + \frac{3}{x}$

C) $42x^4 + 20x^3 + \frac{3}{x}$

D) $42x^4 + 20x^2 + 3x$

E) $42x^5 + 20x^3$

20. m pozitif bir gerçek sayı olmak üzere

$\int_{m}^{3m} (a + 6)da = 16$ **olduğuna göre m değeri kaçtır?**

A) 1 B) 3 C) 7 D) 10 E) 13

21. $f'(x) = 4x^3 + 4x - 10$ **ve** $f(1) = 10$ **olduğuna göre** $f(2)$ **değeri kaçtır?**

A) 18 B) 20 C) 21 D) 22 E) 24

22. $y = x^2 + 6$ **ve** $y = -2x + 9$ **kuralları ile verilen fonksiyonların grafikleri ile sınırlanan bölgenin alanı kaç birimkaredir?**

A) $\frac{25}{3}$ B) $\frac{28}{3}$ C) $\frac{32}{3}$ D) $\frac{34}{3}$ E) $\frac{40}{3}$

23. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & -2 \le x \le 0 \\ x + 4, & 0 < x < 1 \end{cases}$

parçalı fonksiyonu için $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ **değeri kaçtır?**

A) $\frac{19}{3}$ B) $\frac{20}{3}$ C) $\frac{22}{3}$ D) $\frac{25}{3}$ E) $\frac{28}{3}$

24. $f(x) = 2x - 3$ **olduğuna göre** $\int_{2}^{3} f^{-1}(x)dx$ **değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) 3 D) $\frac{10}{3}$ E) $\frac{11}{4}$

25. $21\int (1 - x^2)\sqrt{x}\,dx$ **değeri kaçtır?**

A) $7x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{7}{2}} + c$

B) $14x^{\frac{3}{2}} - 6x^{\frac{7}{2}} + c$

C) $21x^{\frac{3}{2}} - 7x^{\frac{7}{2}} + c$

D) $14x^{\frac{2}{3}} - 6x^{\frac{5}{2}} + c$

E) $21x^{\frac{3}{2}} - 14x^{\frac{7}{2}} + c$

26-54. açık uçlu soruları cevaplayınız.

26. $\int_{-2}^{4} |x - 1|dx$ **değerini bulunuz.**

27. $F(x) = \int_{3}^{x} (t^2 + 3)dt$ **olduğuna göre** $F'(1)$ **değerini bulunuz.**

28. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

olduğuna göre $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

29. $\int_{-2}^{8} [(x+1)(x+3)(x+5)]dx$ **değerini bulunuz.**

30. $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x \leq 3 \text{ ise} \\ -4x + 5, & x > 3 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre $\int_{-1}^{9} f(x-2)dx$ **değerini bulunuz.**

31. $\int_{-3}^{1} \sqrt{x^2 + 2x + 1}\,dx$ **değerini bulunuz.**

32. $k > 0$ **ve** $\int_{0}^{4} \sqrt{kx}\,dx = \int_{0}^{k} \sqrt{x}\,dx$ **olduğuna göre k değerini bulunuz.**

33. $\int_{-2}^{3} ||x| - 1|dx$ **değerini bulunuz.**

34. $\int \left(\frac{x - \sqrt{x}}{2x}\right)dx$ **ifadesinin eşitini bulunuz.**

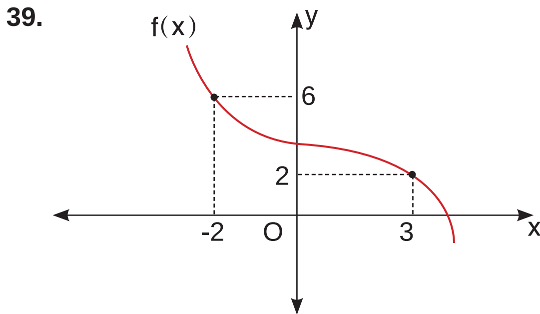
35. $f''(x) = 18x$ **olmak üzere f fonksiyonuna** $A(1, 12)$ **noktasından çizilen teğetin denklemi** $y = 4x + n$ **ise** f **fonksiyonunu bulunuz.**

36. $y = 2x - x^2$ ve $y = x^2 - 4$ **parabollerinin arasında kalan kapalı bölgenin alanını bulunuz.**

37. $y = 2\sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$ **ve** $x = 4$ **ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.**

38. $f'(-1) = 4$ **ve** $f''(x) = 3x^2$ **olduğuna göre f fonksiyonunun grafiğine** $x = -2$ **noktasından çizilen teğetin eğimini bulunuz.**

39.



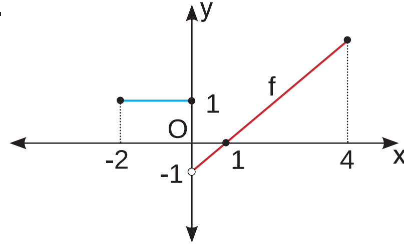
Yukarıdaki şekilde verilenlere göre

$$\int_{-2}^{0} f(x)\cdot f'(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)\cdot f'(x)dx$$

değerini bulunuz.

40. $\int f(2x+3)\cdot d(f(2x+3))$ **ifadesinin eşitini bulunuz.**

41.



Yukarıdaki şekilde f fonksiyonunun $[-2, 4]$ nda grafiği verilmiştir.

Buna göre $\int_{-2}^{4} f(x)dx$ **değerini bulunuz.**

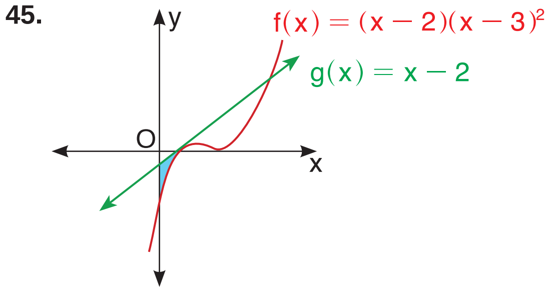
42. $y = x^2 + 4x + 4$ **eğrisi, bu eğrinin** $x = -4$ **noktasındaki teğeti ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.**

43. $y = x^2 - 16$ **ve** $y = -3x^2$ **eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.**

44. Gerçek sayılarda tanımlı ve sürekli f fonksiyonu için $\int_{2}^{p} f'(x)\cdot f''(x)dx = 4$ tür.

f fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki teğetinin eğimi 1 olduğuna göre $x = p$ noktasındaki teğetinin eğiminin alabileceği değerleri bulunuz.

45.



Yukarıdaki şekilde $f(x) = (x - 2)(x - 3)^2$ eğrisi ile $g(x) = x - 2$ doğrusu verilmiştir.

Buna göre taralı alanı bulunuz.

46. $f''(x) = 6x^2$, $f'(1) = 2$ **ve** $f(1) = 4$ **olduğuna göre f fonksiyonunu bulunuz.**

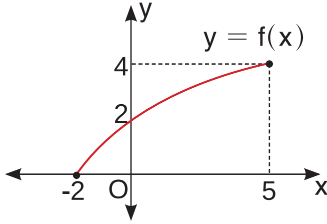
47. $a \neq 0$ **olmak üzere** $\left(\int_{0}^{a} x dx\right)^2 = \int_{0}^{a} x^2 dx$ **ise a değerini bulunuz.**

48. $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2$ **ve** $g(x) = x^4 - 3x^2 + 3$ **olduğuna göre** $\int_{-2}^{2} f(x)dx + \int_{-2}^{2} g(x)dx$ **değerini bulunuz.**

49. $\int_{n}^{2n} (x + 4)dx = \frac{3}{2}$ **olduğuna göre n nin alacağı değerlerin çarpımını bulunuz.**

50. $\int_{-2}^{2} (|x| + |x - 1|)dx$ **değerini bulunuz.**

51.

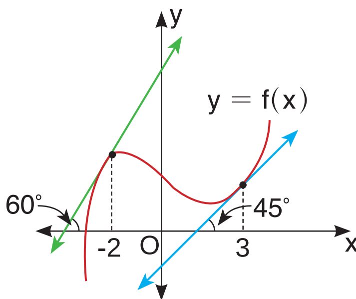


Yukarıdaki şekilde $[-2, 5]$ nda tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $\int_{-2}^{5} f(x)f'(x)dx$ **değerini bulunuz.**

52. $y = x^2$ **eğrisi ile** $y = x$ **doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.**

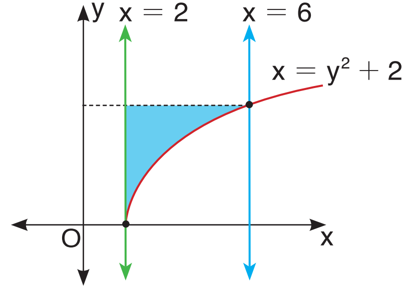
53.



Yukarıdaki şekilde f′ fonksiyonunun grafiği ile $x = -2$ ve $x = 3$ noktalarındaki teğet doğruları çizilmiştir.

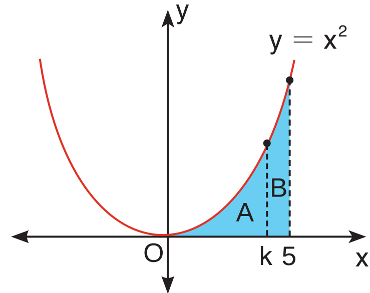
Buna göre $\int_{-3}^{2} f'''(x+1)dx$ **değerini bulunuz.**

54.



Yukarıdaki şekilde verilenlere göre taralı bölgenin alanını bulunuz.

55.



Şekilde taralı A ve B alanları arasında $4A = B$ **bağıntısı olduğuna göre k değerini bulunuz.**

Daha fazla soruya ulaşmak için karekodu okutunuz



GEOMETRİ

7. ANALİTİK GEOMETRİ

7.1. ÇEMBERİN ANALİTİK İNCELEMESİ

Bu Bölümde Neler Öğreneceksiniz?

Çemberin Analitik İncelemesi

- Merkezi ve yarıçapı verilen çemberin denklemini oluşturmayı,
- Denklemleri verilen doğru ile çemberin birbirine göre durumlarını belirleyerek işlem yapmayı öğreneceksiniz.



Alt öğrenme alanı karekodu



Alt öğrenme alanı sunu karekodu



Hazırlık Çalışması

Geçmişten günümüze yön bulmada kullanılan en temel araç pusula olmuştur. Pusulanın ok bulunan ucu manyetik kuzeyi gösterir. Pusulanın merkezi analitik düzlemde orijin ve ok bulunan ucu 2 cm uzunluğunda kabul edilirse pusula elimizde iken kendi eksenimiz etrafında döndüğümüzde merkezi orijin ve yarıçap uzunluğu 2 cm olan bir çember çizilir.

Sizce bu şekilde oluşturulan bir çember, doğru denklemi gibi bir denklem ile ifade edilebilir mi? Araştırınız.

7.1. ÇEMBERİN ANALİTİK İNCELEMESİ

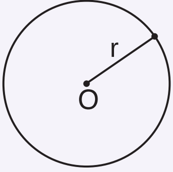
Terimler ve Kavramlar

- **Çemberin standart denklemi**
- **Çemberin genel denklemi**

Merkezi ve Yarıçapı Verilen Çemberin Denklemi

Çemberin Standart Denklemi

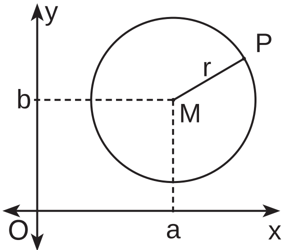
Hatırlatma Yarıçap



Düzlemde sabit bir O noktasına eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine (geometrik yerine) **çember** denir. O noktasına **çemberin merkezi**, çember üzerindeki herhangi bir noktanın çemberin merkezine olan uzaklığına **yarıçap** denir ve **r** ile gösterilir.

Hatırlatma İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Analitik düzlemde verilen $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık $|AB|$ olmak üzere $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ bulunur.



Grafikte verilen merkezi $M(a, b)$ ve yarıçap uzunluğu r olan çemberde M noktasına eşit uzaklıkta bulunan noktalardan herhangi biri $P(x, y)$ olsun. M ile P noktaları arasındaki uzaklık bu çemberin yarıçap uzunluğu olur.

İki nokta arasındaki uzaklık formülünden $|MP| = r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ bulunur. Her iki tarafın karesi alınırsa $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ denklemi elde edilir. Bu denkleme **çemberin standart denklemi** denir.

1. ÖRNEK

Analitik düzlemde merkezi $M(4, -1)$ ve yarıçap uzunluğu $r = 3$ birim olan çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

Analitik düzlemde merkezi $M(a, b)$ ve yarıçap uzunluğu r birim olan çemberin standart denklemi $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ olduğundan bu denklemde $a = 4$, $b = -1$ ve $r = 3$ değerleri yerine yazılırsa çemberin standart denklemi $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$ bulunur.

2. ÖRNEK

Analitik düzlemde standart denklemi $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ olan çemberin merkezini ve yarıçap uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Analitik düzlemde merkezi $M(a, b)$ ve yarıçap uzunluğu r birim olan çemberin standart denklemi $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ olduğundan $(x+3)^2+(y+1)^2=4$ ifadesinde çemberin merkezi $M(a, b)=(-3, -1)$ ve yarıçap uzunluğu $r^2=4 \Rightarrow r=2$ birim bulunur.

3. ÖRNEK

Analitik düzlemde merkezi $M(2, -3)$ olan ve $P(-1, 1)$ noktasından geçen çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

Çemberin standart denklemini yazabilmek için çemberin yarıçap uzunluğu bilinmelidir.

P(−1, 1)
r
M(2, −3)

Çember üzerindeki bir noktanın çemberin merkezine uzaklığı yarıçap uzunluğunu verir. İki nokta arasındaki uzaklık formülünden $|MP|=r$ olur.
$|MP|=\sqrt{(2-(-1))^2+(-3-1)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ birim bulunur.
Merkezi $M(2, -3)$ ve yarıçap uzunluğu $r=5$ birim olan çemberin standart denklemi
$(x-2)^2+(y-(-3))^2=5^2$
$(x-2)^2+(y+3)^2=25$ bulunur.

Hatırlatma Orta Nokta Formülü

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarının orta noktası $M(a, b)$ olmak üzere

M(a, b)
$A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$

$a=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ $b=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

4. ÖRNEK

Analitik düzlemde $A(4, -4)$ ve $B(2, 6)$ noktaları veriliyor. [AB] nı çap kabul eden çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

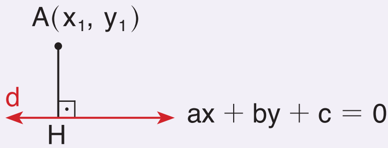
[AB] çap olduğuna göre [AB] nın orta noktası çemberin merkezidir. Çemberin merkezi M olmak üzere orta nokta formülünden $M\left(\dfrac{4+2}{2}, \dfrac{-4+6}{2}\right)=M(3, 1)$ elde edilir.
Ayrıca iki nokta arasındaki uzaklık formülünden çemberin çapının uzunluğu
$|AB|=\sqrt{(4-2)^2+(6-(-4))^2}=\sqrt{4+100}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$ olur.
Yarıçap uzunluğu $\sqrt{26}$ birim ve $M(3, 1)$ olan çemberin standart denklemi $(x-3)^2+(y-1)^2=26$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 1 **Bireysel Çalışma**

$(x-2)^2+y^2=4$ çemberi ve üzerindeki $A(3, \sqrt{3})$ noktası veriliyor. Bir ucu A noktasında olan çapın diğer uç noktasının koordinatlarını bulunuz.

Hatırlatma Bir Noktanın Bir Doğruya En Kısa Uzaklığı

H noktası d doğrusunun üzerinde bir nokta ve A noktasının d doğrusuna en kısa uzaklığı $|AH|$ ise

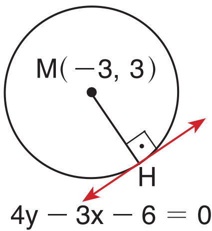


$$|AH| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

5. ÖRNEK

Merkezi $M(-3, 3)$ olan çember, denklemi $4y - 3x - 6 = 0$ olan doğruya teğet olduğuna göre bu çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM



Çemberin merkezinin doğruya olan en kısa uzaklığı yarıçap uzunluğunu verir. Bir noktanın bir doğruya olan en kısa uzaklığı formülünden yarıçap uzunluğu

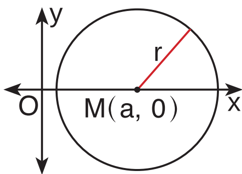
$$r = |MH| = \frac{|4\cdot(3) - 3\cdot(-3) - 6|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|12 + 9 - 6|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ olur.}$$

Buradan merkezi $M(-3, 3)$ ve yarıçap uzunluğu 3 birim olan çemberin standart denklemi $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 2 **Bireysel Çalışma**

Merkezi $M(2, 2)$ olan çember, $x + y + 2 = 0$ doğrusuna teğet olduğuna göre bu çemberin standart denklemini bulunuz.

Merkezi x Ekseni Üzerinde Olan Çemberin Denklemi



Merkezi $M(a, b)$ olan bir çemberin merkezi x ekseni üzerinde ise $b = 0$ olur. Buradan merkezi $M(a, 0)$ ve yarıçap uzunluğu r birim olan çemberin standart denklemi $(x - a)^2 + (y - 0)^2 = r^2 \Rightarrow (x - a)^2 + y^2 = r^2$ bulunur.

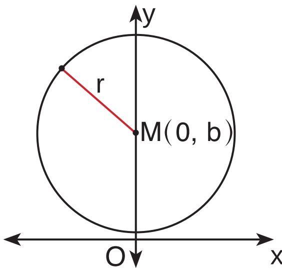
6. ÖRNEK

Yarıçap uzunluğu 4 birim olan çemberin merkezi x ekseni üzeridedir. Analitik düzlemde merkezinin apsisi -3 noktası olan çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

Çemberin merkezi x ekseni üzerinde, apsisi -3 olduğundan merkezi $M(-3, 0)$ olur. Yarıçap uzunluğu $r = 4$ birim olduğundan çemberin standart denklemi
$(x + 3)^2 + y^2 = 4^2 \Rightarrow (x + 3)^2 + y^2 = 16$ bulunur.

Merkezi y Ekseni Üzerinde Olan Çemberin Denklemi



Merkezi $M(a, b)$ olan bir çemberin merkezi y ekseni üzerinde ise $a = 0$ olur. Buradan merkezi $M(0, b)$ ve yarıçap uzunluğu r birim olan çemberin standart denklemi $(x - 0)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + (y - b)^2 = r^2$ bulunur.

7. ÖRNEK

Analitik düzlemde merkezi y ekseni üzerinde, merkezinin ordinatı 4 ve yarıçap uzunluğu 5 birim olan çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

Çemberin merkezi y ekseni üzerinde ve ordinatı 4 olduğundan $M(0, 4)$ olur.
Yarıçap uzunluğu $r = 5$ birim olduğundan çemberin standart denklemi

$x^2 + (y - 4)^2 = 5^2$

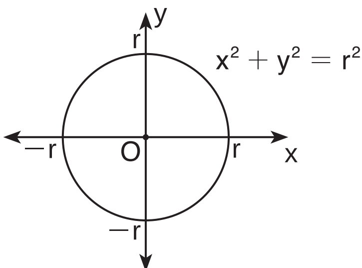
$x^2 + (y - 4)^2 = 25$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 3 — Bireysel Çalışma

1. Merkezi x ekseni üzerinde, merkezinin apsisi 1 ve yarıçap uzunluğu 2 birim olan çemberin standart denklemini bulunuz.

2. Merkezi y ekseni üzerinde, merkezinin ordinatı -3 ve yarıçap uzunluğu 4 birim olan çemberin standart denklemini bulunuz.

Merkezil Çemberin Denklemi



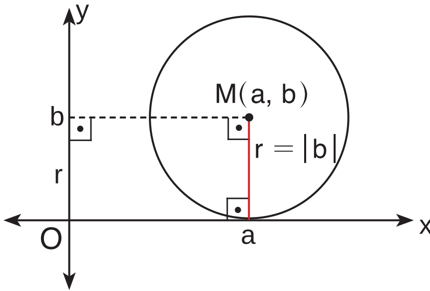
Merkezi $M(a, b)$ ve x eksenine teğet olan bir çemberin merkezi orijin üzerinde olduğunda $a = 0$ ve $b = 0$ olur. Buradan çemberin merkezi $M(0, 0)$ ve yarıçap uzunluğu r birim olan çemberin standart denklemi $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$ bulunur. Merkezi orijinde olan çemberler **merkezil çember** olarak adlandırılır.

Ders İçi Uygulama 4

Bireysel Çalışma

Merkezi x ekseni üzerinde ve yarıçap uzunluğu 3 birim olan çemberler, merkezi orijinde ve yarıçap uzunluğu 2 birim olan çembere teğettir.
Bu koşula uyan çemberlerin standart denklemini bulunuz.

x Eksenine Teğet Olan Çemberin Denklemi



Analitik düzlemde merkezi $M(a, b)$ ve yarıçap uzunluğu r olan bir çember x eksenine teğet ise $r = |b|$ olur. Bu durumda çemberin standart denklemi $(x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2$ olur.

8. ÖRNEK

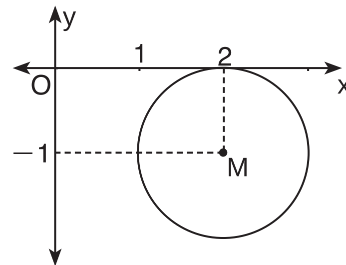
Analitik düzlemde merkezi $M(2, -1)$ olan çember x eksenine teğettir. Bu çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

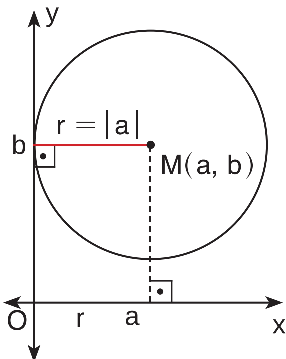
Çember x eksenine teğet olduğu için çemberin yarıçap uzunluğu $r = |-1| = 1$ birim olup çemberin standart denklemi

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1^2$

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$ bulunur.



y Eksenine Teğet Olan Çemberin Denklemi

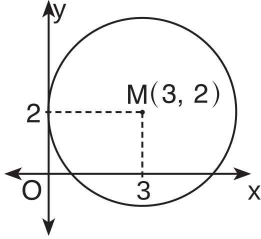


Analitik düzlemde merkezi $M(a, b)$ ve yarıçap uzunluğu r olan bir çember y eksenine teğet ise $r = |a|$ olur. Bu durumda çemberin standart denklemi $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2$ olur.

9. ÖRNEK

Analitik düzlemde merkezi $M(3, 2)$ olan çember y eksenine teğettir. Bu çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

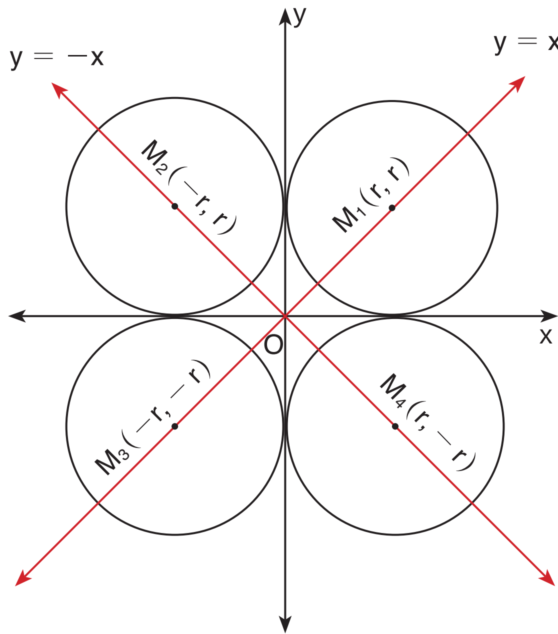


Çember y eksenine teğet olduğu için $r = |3| = 3$ birim olup çemberin standart denklemi

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ bulunur.

Her İki Eksene de Teğet Olan Çember Denklemi



Merkezi $M(a, b)$ ve yarıçap uzunluğu r birim olan çember her iki eksene de teğet ise çemberin yarıçap uzunluğu $r = |a| = |b|$ olur.

Her iki eksene de teğet olan çemberlerin merkezi $y = x$ veya $y = -x$ doğruları üzerindedir.

Bu çemberin standart denklemi, çember

I. bölgede ise merkezi $M_1(r, r)$ olacağından
$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$

II. bölgede ise merkezi $M_2(-r, r)$ olacağından
$(x + r)^2 + (y - r)^2 = r^2$

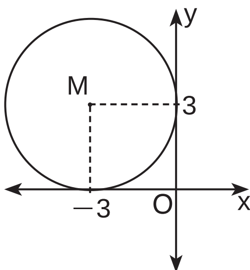
III. bölgede ise merkezi $M_3(-r, -r)$ olacağından
$(x + r)^2 + (y + r)^2 = r^2$

IV. bölgede ise merkezi $M_4(r, -r)$ olacağından
$(x - r)^2 + (y + r)^2 = r^2$ olur.

10. ÖRNEK

Yarıçap uzunluğu 3 birim ve analitik düzlemin II. bölgesinde eksenlere teğet olan çemberin standart denklemini yazınız.

ÇÖZÜM



Çember analitik düzlemin II. bölgesinde eksenlere teğet olduğundan çemberin merkezi $M(-3, 3)$ olur. Bu durumda çemberin standart denklemi

$(x - (-3))^2 + (y - 3)^2 = 3^2$

$(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 5 — Bireysel Çalışma

1. Yarıçap uzunluğu 3 birim ve analitik düzlemin III. bölgesinde eksenlere teğet olan çemberin standart denklemini yazınız.

2. Yarıçap uzunluğu 4 birim ve analitik düzlemin IV. bölgesinde eksenlere teğet olan çemberin standart denklemini yazınız.

11. ÖRNEK

Merkezi $2x - 3y + 10 = 0$ doğrusu üzerinde bulunan ve eksenlere analitik düzlemin II. bölgesinde teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

Çember analitik düzlemin II. bölgesinde eksenlere teğet olduğu için çemberin merkezi $M(-r, r)$ şeklindedir. Çemberin merkezi $2x - 3y + 10 = 0$ doğrusu üzerinde olduğu için merkezin koordinatları bu doğru denklemini sağlar. $x = -r$ ve $y = r$ değerleri doğru denkleminde yerine yazılırsa

$$2x - 3y + 10 = 0$$

$$2\cdot(-r) - 3\cdot r + 10 = 0$$

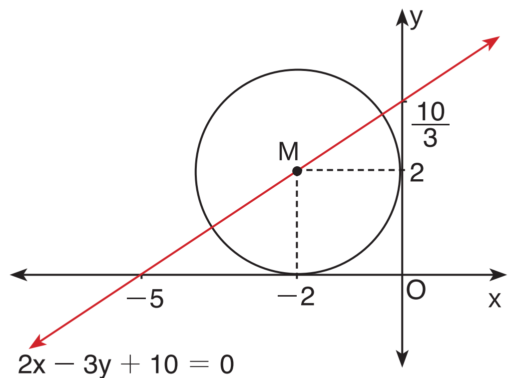
$$-5r = -10 \Rightarrow r = 2 \text{ bulunur.}$$

Çemberin merkezi $M(-2, 2)$ olur.

Çemberin standart denklemi

$$(x-(-2))^2 + (y-2)^2 = 2^2$$

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4 \text{ bulunur.}$$



Ders İçi Uygulama 6 — Bireysel Çalışma

Analitik düzlemde merkezi $3x - 4y - 7 = 0$ doğrusu üzerinde bulunan ve her iki eksene de analitik düzlemin IV. bölgesinde teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.

12. ÖRNEK

Merkezi x ekseni üzerinde bulunan ve x eksenini $B(-1, 0)$ ve $C(3, 0)$ noktalarında kesen çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$[BC]$ nın orta noktası çemberin merkezi olur. Buradan çemberin merkezi $M\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = M(1, 0)$ olur.

$[BC]$ çemberin çapı olduğundan $|BC| = |BO| + |OC| = 1 + 3 = 4$ birim bulunur. Çemberin çapının uzunluğu 4 birim ise $r = 2$ birimdir. Buradan çemberin standart denklemi $(x-1)^2 + (y-0)^2 = 2^2$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 7 — **Bireysel Çalışma**

Merkezi y ekseni üzerinde bulunan ve y eksenini $(0, 3)$ ve $(0, 5)$ noktalarında kesen çemberin standart denklemini bulunuz.

Çemberin Genel Denklemi

Merkezi (a, b) noktası ve yarıçap uzunluğu r birim olan çemberin $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ biçiminde verilen standart denklemi düzenlenirse $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$ olur.
$-2a = D$, $-2b = E$, $a^2 + b^2 - r^2 = F$ alınır ve bu eşitlikler denklemde yerine yazılırsa
$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ denklemi elde edilir. Elde edilen bu denkleme **çemberin genel denklemi** denir.

Buradan $-2a = D \Rightarrow a = -\frac{D}{2}$ ve $-2b = E \Rightarrow b = -\frac{E}{2}$ olup çemberin merkezi $M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ olur. Çemberin yarıçap uzunluğu ise

$$a^2 + b^2 - r^2 = F \Rightarrow r^2 = a^2 + b^2 - F$$
$$\Rightarrow r^2 = \left(-\frac{D}{2}\right)^2 + \left(-\frac{E}{2}\right)^2 - F$$
$$\Rightarrow r^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$
$$\Rightarrow r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$
$$\Rightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} \text{ birim bulunur.}$$

Bu durumda denklemi $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ olan çemberin merkezi $M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ ve yarıçap uzunluğu $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ olur.

$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ denkleminin çemberin genel denklemi olabilmesi için $A=B\neq 0$ olmalıdır. Bu denklem $A=B=1$ olacak şekilde düzenlenirse $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ denklemi elde edilir. Bu denklemde D^2+E^2-4F ifadesine **çember denkleminin diskriminantı** denir. Çember denkleminin diskriminantı için aşağıdaki durumlar elde edilir.

- $D^2+E^2-4F>0$ ise verilen denklem bir çember belirtir.
- $D^2+E^2-4F<0$ ise verilen denklem gerçek sayılar kümesinde bir çember belirtmez.
- $D^2+E^2-4F=0$ ise verilen denklem bir nokta belirtir. Bu nokta $M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ olur.

13. ÖRNEK

$x^2+y^2+6x-8y+16=0$ denklemi veriliyor.

a) Bu denklemin çember belirtip belirtmediğini inceleyiniz.

b) Verilen denklem bir çember belirtiyor ise bu çemberin merkezini ve yarıçap uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

a) $x^2+y^2+6x-8y+16=0$ denkleminde $D=6,\ E=-8,\ F=16$ olup buradan
$D^2+E^2-4F=(6)^2+(-8)^2-4\cdot 16=36+64-64=36$ bulunur.
$D^2+E^2-4F=36>0$ olduğundan verilen denklem bir çember belirtir.

b) I. Yol

Çemberin merkezi $M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)=M\left(-\frac{6}{2}, -\frac{(-8)}{2}\right)=M(-3, 4)$ olur.

Çemberin yarıçap uzunluğu $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}=\frac{1}{2}\sqrt{36}=3$ birim bulunur.

II. Yol

$x^2+y^2+6x-8y+16=0\Rightarrow(x^2+6x+9)+(y^2-8y+16)-9=0$

$\Rightarrow(x+3)^2+(y-4)^2=3^2$ olur.

Buradan $M(-3, 4)$ ve $r=3$ birim bulunur.

14. ÖRNEK

Analitik düzlemde $x^2+y^2-6x+10y+36=0$ denkleminin bir çember belirtip belirtmediğini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2+y^2-6x+10y+36=0$ denkleminde $D=-6,\ E=10,\ F=36$ değerleri yerine yazılırsa
$D^2+E^2-4F=(-6)^2+10^2-4\cdot 36=36+100-144=-8$ bulunur.
$D^2+E^2-4F=-8<0$ olduğundan verilen denklem gerçek sayılar kümesinde bir çember belirtmez.

Ders İçi Uygulama 8 — Bireysel Çalışma

Analitik düzlemde $x^2+y^2+8x-6y+25=0$ denkleminin bir çember belirtip belirtmediğini inceleyiniz.

15. ÖRNEK

$(2m-1)x^2+(m+1)y^2-3mx+6my+3=0$ denklemi bir çember belirttiğine göre bu çemberin merkezini ve yarıçap uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Genel çember denkleminde x^2 ve y^2 li terimin katsayıları eşit ve 1 olmalıdır.
x^2 ve y^2 li terimlerin katsayıları eşitlenirse
$2m-1=m+1 \Rightarrow m=2$ olur.
Bu değer denklemde yerine yazılırsa

$$(2\cdot 2-1)x^2+(2+1)y^2-3\cdot 2\cdot x+6\cdot 2\cdot y+3=0$$
$$3x^2+3y^2-6x+12y+3=0$$
$$\frac{1}{3}\cdot(3x^2+3y^2-6x+12y+3)=\frac{1}{3}\cdot 0$$
$$x^2+y^2-2x+4y+1=0 \text{ olur.}$$

Bu denklemde x^2 ve y^2 li terimlerin katsayılarını 1 yapmak için denklemin her iki tarafı $\left(\frac{1}{3}\right)$ ile çarpılır.

Bu çemberin genel denkleminde $D=-2$, $E=4$, $F=1$ olup çemberin yarıçap uzunluğu

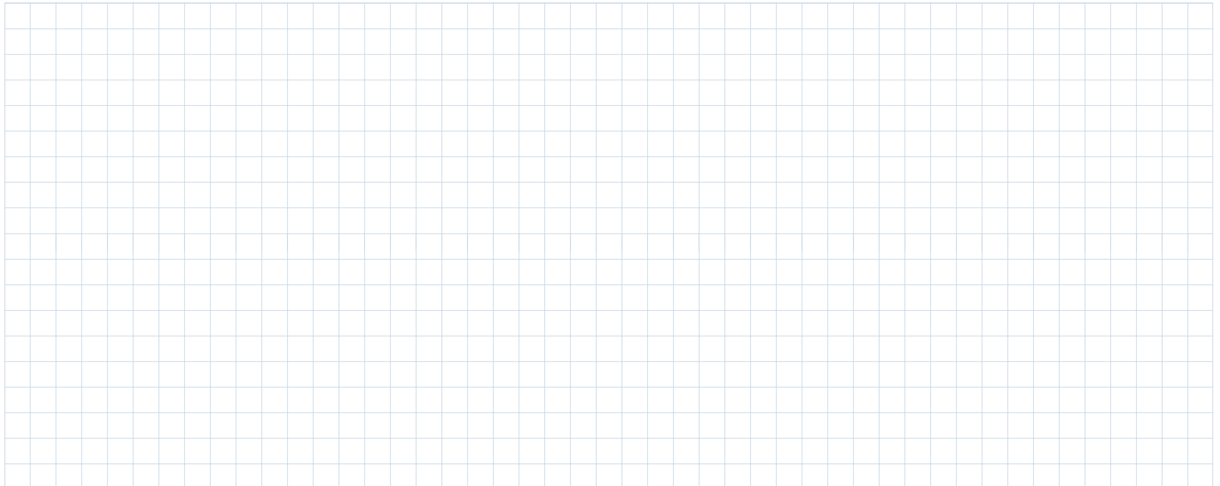
$$r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-2)^2+4^2-4\cdot 1}$$
$$r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4+16-4}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{16}=2 \text{ birim bulunur.}$$

Ders İçi Uygulama 9 — Bireysel Çalışma

Aşağıda radar kulesi, iki farklı uçağın ve bir geminin radar menzilini analitik düzlemde temsil eden denklemler verilmiştir.

Radar Kulesi	$3x^2+(m-1)y^2-6x+2y-m=0$
Uçak 1	$(n-5)x^2+2y^2+(n+3)x-(n+1)y+7=0$
Uçak 2	$x^2+y^2-10x+6y+9=0$
Gemi	$(x+1)^2+(y+2)^2=9$

Buna göre orijin noktasında bulunan bir cismi; konumları verilen kule, gemi ve uçaklardan hangisinin tespit edeceğini bulunuz.



Ders İçi Uygulama 10 Bireysel Çalışma

Radyo verici istasyonları radyo yayını yapan, haber ve programların ses kayıtlarını ses sinyaline (AF) çeviren ve ses sinyalinin radyo alıcılarına ulaştırılmasını sağlayan teknik araçlardır. Aşağıdaki grafikte analitik düzlemde modellenmiş bir bölgedeki aynı radyo kanalına ait 3 adet radyo verici istasyonun konumu A, B ve C olarak verilmiştir. Bu modellemede analitik düzlemdeki 1 birim = 1 km olarak kabul edilmiştir. Bu radyo verici istasyonlarının her biri, verilen noktaları merkez kabul eden çember şeklindeki sınırları içinde kalan bölgeye yayın yapmaktadır. Bu bölgeye radyo verici istasyonunun kapsama alanı denir. Bir radyo alıcısının sinyal alabilmesi için çember şeklindeki bu sınırın içinde olması gerekir.

Yukarıdaki grafikte verilen 3 radyo verici istasyonu ile ilgili bilinenler şu şekildedir:

- 1 No.lu radyo verici istasyonu A, 3 No.lu radyo verici istasyonu C noktasındadır. Radyo verici istasyonlarının boyutu önemsenmemektedir.
- Üç radyo verici istasyonunun kapsama alanlarının kesişmediği bilinmektedir.
- 1 No.lu radyo verici istasyonunun hizmet verdiği bölge merkezi $A(-80, 100)$ ve $r = 55$ km
- 2 No.lu radyo verici istasyonunun hizmet verdiği bölge merkezi $B(10, 52)$ ve $r = 20$ km
- 3 No.lu radyo verici istasyonunun hizmet verdiği bölge merkezi $C(70, 20)$ ve $r = 30$ km olan çember denklemi ile ifade edilmektedir.

Betül, A noktasından B noktasına radyo dinleyerek doğrusal bir yol boyunca arabasıyla seyahat ettiğine göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

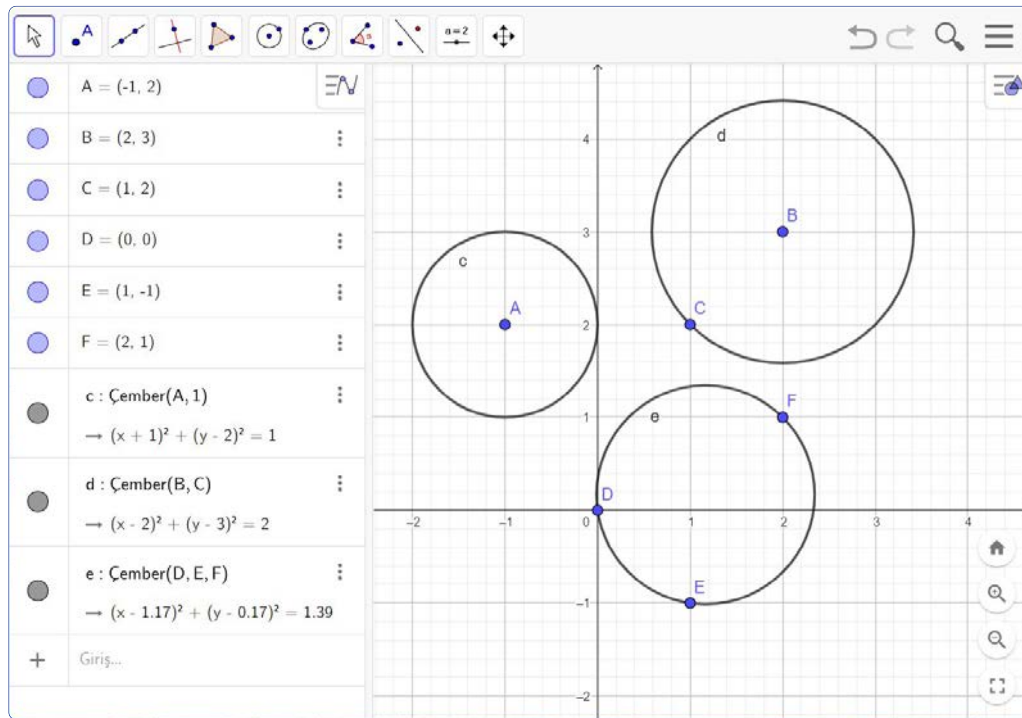
a) A noktasından C noktasına varıncaya kadar yolun kaç kilometrelik bölümünde Betül'ün radyo dinleyemeyeceğini bulunuz.

b) 50 km/sa. sabit hızla yol aldığına göre A noktasından C noktasına varıncaya kadar Betül'ün radyoyu kaç saat dinleyebileceğini bulunuz.

Ders İçi Uygulama 11 — Teknoloji

Dinamik geometri programı yardımı ile merkezi ve yarıçap uzunluğu, merkezi ve geçtiği bir noktası veya geçtiği üç noktası bilinen çemberlerin grafiğini çizebilmek için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. Adım: Giriş kısmına ayrı ayrı **(-1,2), (2,3), (1,2), (0,0), (1,-1)** ve **(2,1)** yazılarak A, B, C, D, E ve F noktaları bulunur.
2. Adım: Giriş kısmına **Çember(A,1)** yazılarak merkezi A noktası ve yarıçap uzunluğu 1 birim olan çember çizilir.
3. Adım: Giriş kısmına **Çember(B,C)** yazılarak merkezi B noktası ve yarıçap uzunluğu IBCI kadar olan çember çizilir.
4. Adım: Giriş kısmına **Çember(D,E,F)** yazılarak merkezi D, E ve F noktalarından geçen çember çizilir.



Dinamik geometri programı kullanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.
1. Merkezi $(-1, 3)$ ve yarıçap uzunluğu 3 birim olan çemberi çiziniz.
2. Merkezi $(2, -1)$ olan ve $(0, 0)$ noktasından geçen çemberi çiziniz.
3. $(0, 1)$, $(-1, 0)$ ve $(1, -1)$ noktalarından geçen çemberi çiziniz.
4. Giriş kısmına **Çember((3,3),0)** yazıldığında hangi geometrik şekil ile karşılaşılacağını ve nedenini açıklayınız.

ALIŞTIRMALAR 7.1

1. Aşağıda yarıçap uzunluğu ve merkezinin koordinatları verilen çemberlerin standart denklemini bulunuz.

a) $r = 2,\ M(1, -1)$
b) $r = 3,\ M(-3, 2)$
c) $r = 6,\ M(-4, 6)$
ç) $r = \frac{3}{5},\ M\left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right)$
d) $r = \sqrt{5},\ M\left(2, -\frac{3}{4}\right)$

2. Aşağıda standart denklemi verilen çemberlerin merkezlerini ve yarıçap uzunluğunu bulunuz.

a) $(x-3)^2 + y^2 = 4$
b) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$
c) $x^2 + y^2 = 2$
ç) $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$
d) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 5$

3. Aşağıda genel denklemi verilen çemberlerin merkezini ve yarıçap uzunluğunu bulunuz.

a) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 3x + 5y + \frac{33}{4} = 0$
ç) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 16 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$

4. Merkezi $M(3, 1)$ noktası ve x eksenine teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.

5. Merkezi $M(4, -1)$ noktası ve y eksenine teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.

6. Merkezi analitik düzlemin dördüncü bölgesinde bulunan, x ve y eksenine teğet, yarıçap uzunluğu 3 birim olan çemberin genel denklemini bulunuz.

7. Analitik düzlemde $A(-3, 0)$, $B(0, -3\sqrt{3})$ ve $C(0, \sqrt{3})$ noktalarından geçen çemberin genel denklemini bulunuz.

8. $x^2 + y^2 - 6y + 4m + 1 = 0$ **denklemi bir nokta belirttiğine göre m değerini bulunuz.**

9. $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 2n - 1 = 0$ **denklemi bir çember belirttiğine göre n nin <u>en küçük</u> tam sayı değerini bulunuz.**

10. $n \in \mathbb{R} - \{1\}$
$(n-1)x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 4n = 0$
denklemi bir çember belirttiğine göre bu çemberin merkezini ve yarıçap uzunluğunu bulunuz.

11. Analitik düzlemde $A(-1, 5)$ ve $B(5, -3)$ noktaları veriliyor.

$[PA] \perp [PB]$ **olacak şekilde tanımlanan** $P(x, y)$ **noktalarının geometrik yerini bulunuz.**

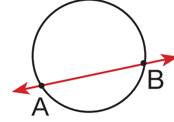
Bir Çember İle Bir Doğrunun Birbirine Göre Durumları

Hatırlatma

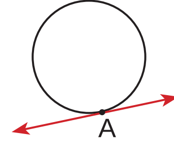
$ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden denkleminin diskriminantı $\Delta = b^2 - 4ac$ olur.

Analitik düzlemde genel denklemi $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ olan çember ile denklemi $y = mx + n$ olan doğru verilsin. Çember denkleminde y yerine $mx + n$ yazılıp denklem düzenlenirse x e bağlı ikinci dereceden bir denklem elde edilir. Bu denklemi sağlayan x değerleri çember ile doğrunun kesim noktalarının apsisleridir. Elde edilen bu denklemin diskriminantı Δ olmak üzere

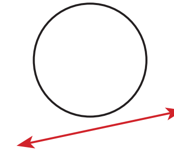
- $\Delta > 0$ ise doğru, çemberi iki farklı noktada keser. Ortak çözüm denkleminin kökleri kesim noktalarının apsisleridir.



- $\Delta = 0$ ise doğru, çembere teğettir. Bu durumda doğru ile çember sadece bir noktada kesişir. Ortak çözüm denkleminin kökü teğet noktasının apsisidir.



- $\Delta < 0$ ise doğru, çemberi kesmez. Doğru ile çemberin ortak noktası yoktur.



16. ÖRNEK

Analitik düzlemde $y = x - 2$ doğrusunun $x^2 + y^2 - 2x + 4y + m = 0$ çemberine teğet olması için m değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Çember ile doğru birbirine teğet ise çember denkleminde y yerine $x - 2$ yazıldığında çember denkleminin diskriminantı 0 olmalıdır.
Buradan

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + m = 0$$
$$x^2 + (x - 2)^2 - 2x + 4(x - 2) + m = 0$$
$$x^2 + x^2 - 4x + 4 - 2x + 4x - 8 + m = 0$$
$$2x^2 - 2x - 4 + m = 0 \text{ olur.}$$

Bu denklemde $\Delta = 0$ olmalıdır. Buna göre

$$(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m - 4) = 0$$
$$4 + 32 - 8m = 0$$
$$36 = 8m$$
$$m = \frac{9}{2} \text{ bulunur.}$$

17. ÖRNEK

Genel denklemi $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$ olan çember ile $2x + y = 0$ doğrusunun birbirine göre durumunu inceleyiniz.

ÇÖZÜM

Çember denklemi ile doğru denkleminin ortak çözümü yapılır. $2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x$ olur. Bu y değeri çember denkleminde yerine yazılırsa

$$x^2 + (-2x)^2 + 6x - 4(-2x) - 3 = 0$$
$$x^2 + 4x^2 + 6x + 8x - 3 = 0$$
$$5x^2 + 14x - 3 = 0 \text{ elde edilir.}$$

Elde edilen bu denklemin diskriminantı bulunur.

$\Delta = b^2 - 4ac = 14^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-3) = 196 + 60 = 256$

$\Delta = 256 > 0$ olduğundan doğru, çemberi iki farklı noktada keser.

18. ÖRNEK

Genel denklemi $x^2 + y^2 - x + 3y + m = 0$ olan çember ile $y = 2x + 1$ doğrusunun ortak noktaları olmadığına göre m nin değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Çember ile doğrunun ortak noktası yok ise ortak çözüm denkleminde $\Delta < 0$ olmalıdır.

$y = 2x + 1$ değeri çember denkleminde yerine yazılırsa

$$x^2 + (2x + 1)^2 - x + 3 \cdot (2x + 1) + m = 0$$
$$x^2 + 4x^2 + 4x + 1 - x + 6x + 3 + m = 0$$
$$5x^2 + 9x + m + 4 = 0 \text{ denklemi elde edilir.}$$

Çember ve doğrunun ortak noktası olmadığı için bu denklemde $\Delta < 0$ olmalıdır.

$$9^2 - 4 \cdot 5 \cdot (m + 4) < 0$$
$$81 - 20m - 80 < 0$$
$$1 < 20m$$
$$\frac{1}{20} < m \text{ bulunur.}$$

19. ÖRNEK

Genel denklemi $x^2 + y^2 + 2x - 3y - 4 = 0$ olan çemberin y eksenini kestiği noktalar arasındaki uzaklığın kaç birim olduğunu bulunuz.

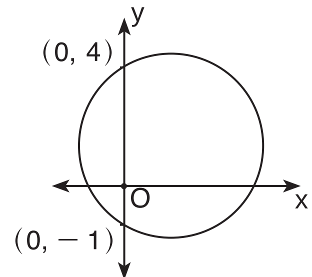
ÇÖZÜM

Genel denklemi $x^2 + y^2 + 2x - 3y - 4 = 0$ olan çemberin y eksenini kestiği noktaların apsisleri 0 olur. Çemberin genel denkleminde $x = 0$ yazılırsa $y^2 - 3y - 4 = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri, çemberin y eksenini kestiği noktaların ordinatları

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$
$$(y - 4) \cdot (y + 1) = 0$$

$y - 4 = 0$ veya $y + 1 = 0$

$y = 4$ $\qquad$ $y = -1$ olur.



Buradan $(0, 4)$ ve $(0, -1)$ noktaları elde edilir.

Bu iki nokta arasındaki uzaklık $|4 - (-1)| = 5$ birim olur.

20. ÖRNEK

$(x-2)^2+y^2=9$ çemberi ile $y=x+3$ doğrusunun kesişip kesişmediğini inceleyiniz.

ÇÖZÜM

$(x-2)^2+y^2=9$ çember denkleminde y yerine $x+3$ yazılarak denklem düzenlenirse

$$(x-2)^2+(x+3)^2=9$$
$$x^2-4x+4+x^2+6x+9=9$$
$$2x^2+2x+4=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin diskriminantı

$\Delta=2^2-4(2)(4)=4-32=-28$ bulunur.

$\Delta=-28<0$ olduğundan çember ile doğru kesişmez.

21. ÖRNEK

Analitik düzlemin 3. bölgesinde $y=\sqrt{3}x$ doğrusuna ve x eksenine teğet olan çemberin yarıçap uzunluğu 4 birimdir. Bu çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$y=\sqrt{3}x$ doğrusunun eğimi $\sqrt{3}$ olduğundan eğim açısının ölçüsü 60° olur. Çemberin merkezinden x eksenine ve doğruya teğet olduğu noktaya bir dikme çizilir. Elde edilen HMO dik üçgeninde $|MH|=4$ ise $|HO|=4\sqrt{3}$ birim olur.

Buradan

$M(-4\sqrt{3},-4)$ ve $r=4$ birim olan çemberin standart denklemi

$(x+4\sqrt{3})^2+(y+4)^2=4^2$

$(x+4\sqrt{3})^2+(y+4)^2=16$ bulunur.

Ders İçi Uygulama 12 — Bireysel Çalışma

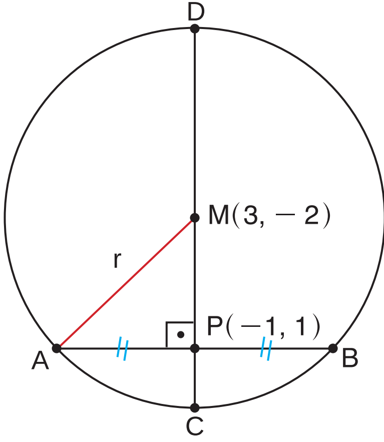
1. Standart denklemi $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ olan çember ile $y-x=0$ doğrusunun birbirine göre durumunu inceleyiniz.

2. Analitik düzlemin 1. bölgesinde $x-\sqrt{3}y=0$ doğrusuna ve y eksenine teğet olan çemberin yarıçap uzunluğu 2 birimdir.
Bu çemberin standart denklemini bulunuz.

22. ÖRNEK

Genel denklemi $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 87 = 0$ olan çemberin iç bölgesindeki $P(-1, 1)$ noktasından geçen en kısa kiriş ile en uzun kirişin uzunlukları toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekildeki P noktasından geçen en kısa kiriş P noktasında çemberin çapına dik olan $[AB]$ kirişidir, en uzun kiriş P noktasından ve merkezden geçen $[CD]$ kirişidir, çemberin çapıdır.

$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 87 = 0$ denklemi düzenlenirse

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 100$ olur.

$M(3, -2)$ ve $r = 10$ elde edilir.

Çemberin merkezi ile P noktası arasındaki uzaklık

$|PM| = \sqrt{(3 + 1)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ birim olur.

M ile A noktaları birleştirilirse MPA dik üçgeni elde edilir.

MPA dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$|MA|^2 = |PA|^2 + |PM|^2$

$10^2 = |PA|^2 + 5^2 \Rightarrow |PA| = 5\sqrt{3}$ elde edilir.

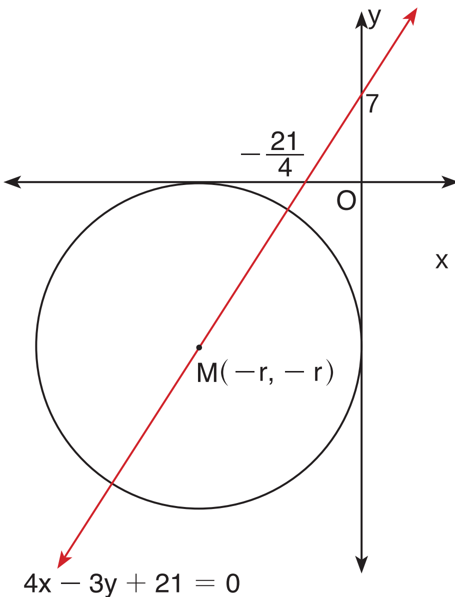
Buradan $|AB| = 2|PA| = 10\sqrt{3}$ ve $|CD| = 20$ olur.

Kirişlerin uzunlukları toplamı $|CD| + |AB| = 20 + 10\sqrt{3}$ birim bulunur.

23. ÖRNEK

Merkezi $4x - 3y + 21 = 0$ doğrusu üzerinde bulunan ve her iki eksene de III. bölgede teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM



III. bölgede eksenlere teğet ve yarıçap uzunluğu r birim olan çemberin merkezi $M(-r, -r)$ noktasıdır. Bu nokta $4x - 3y + 21 = 0$ doğrusu üzerinde olduğundan doğrunun denklemini sağlar.

$4x - 3y + 21 = 0$ doğru denkleminde x yerine $-r$ ve y yerine $-r$ yazılırsa

$4 \cdot (-r) - 3 \cdot (-r) + 21 = 0$

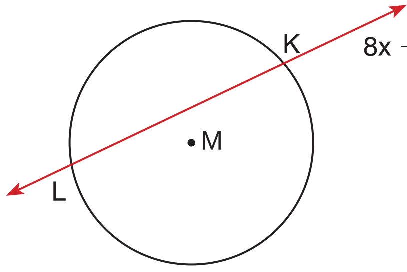
$-4r + 3r + 21 = 0$

$r = 21$ olur.

Buradan çemberin standart denklemi

$(x + 21)^2 + (y + 21)^2 = 21^2$ elde edilir.

24. ÖRNEK

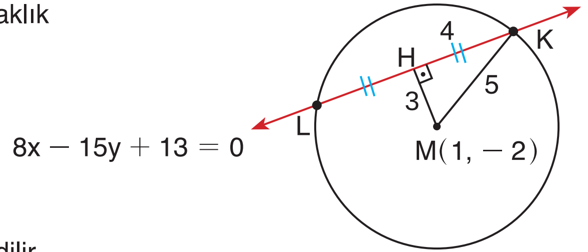


Yandaki şekilde $8x - 15y + 13 = 0$ doğrusu $M(1, -2)$ merkezli çemberi K ve L noktalarında kesmektedir. $|KL| = 8$ birim olduğuna göre bu çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

Çemberin merkezi ile doğru arasındaki arasındaki uzaklık

$$|MH| = \frac{|8 \cdot 1 - 15 \cdot (-2) + 13|}{\sqrt{8^2 + 15^2}} = \frac{|8 + 30 + 13|}{\sqrt{64 + 225}} = \frac{|51|}{17} = 3 \text{ birim olur.}$$



M ile K noktaları birleştirilirse MHK dik üçgeni elde edilir.

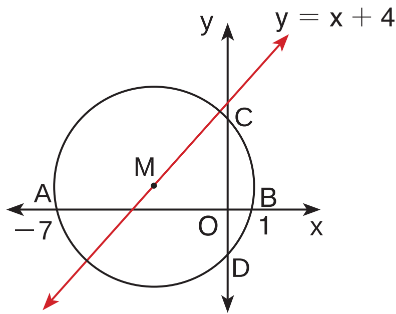
$|KH| = |HL| = 4$ ve $|MH| \perp |KL|$ olmak üzere

MHK dik üçgeninden

$|MK|^2 = |MH|^2 + |KH|^2 \Rightarrow |MK|^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow |MK| = r = 5$ olur.

Analitik düzlemde $M(1, -2)$ merkezli ve yarıçap uzunluğu 5 birim olan çemberin standart denklemi $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5^2$ olur.

Ders İçi Uygulama 13 — Bireysel Çalışma

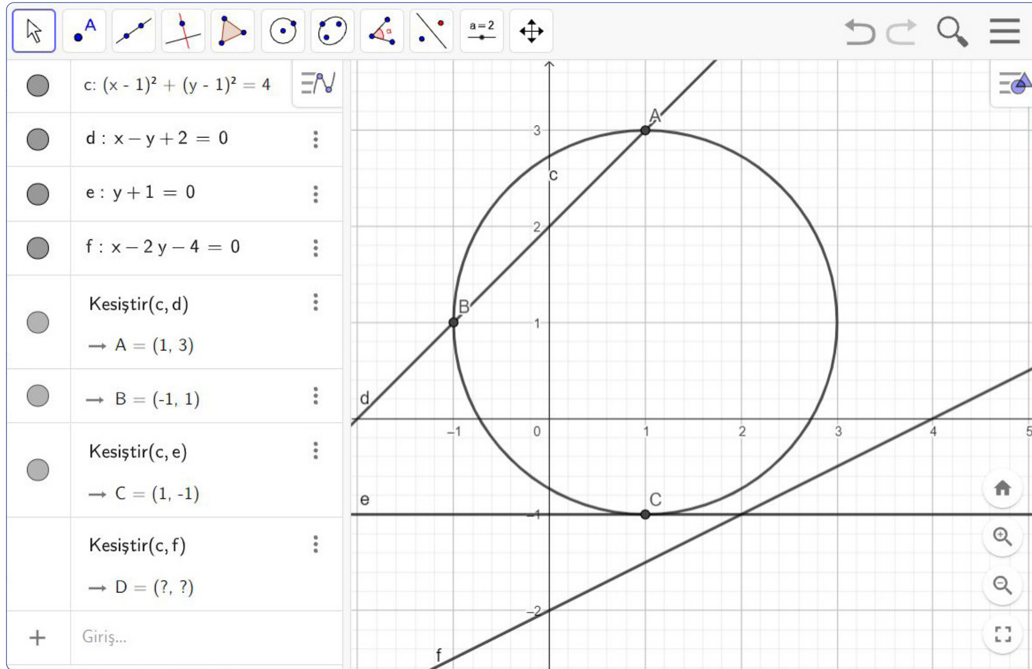


Şekildeki çemberin merkezi $y = x + 4$ doğrusu üzerindedir. Çember x eksenini $A(-7, 0)$ ve $B(1, 0)$ noktalarında, y eksenini C ve D noktalarında kestiğine göre $|CD|$ nu bulunuz.

Ders İçi Uygulama 14 — Teknoloji

Dinamik geometri programında denklemi verilen doğru ile çemberin birbirine göre durumlarını incelemek ve varsa kesim noktalarını bulmak için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. Adım: Giriş kısmına ayrı ayrı **c:(x-1)²+(y-1)²=4**, **d:x-y+2=0**, **e:y+1=0** ve **f:x-2y-4=0** yazılarak çember ve doğruların grafiği elde edilir.
2. Adım: Giriş kısmına **Kesiştir(c,d)** yazılarak c çemberi ile d doğrusunun kesiştiği A ve B noktaları bulunur.
3. Adım: Giriş kısmına **Kesiştir(c,e)** yazılarak c çemberi ile e doğrusunun kesiştiği C noktası bulunur.
4. Adım: Giriş kısmına **Kesiştir(c,f)** yazılarak c çemberi ile f doğrusunun kesişmediği görülür.



Dinamik geometri programını kullanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ çemberi ile $y - x + 3 = 0$ doğrusunun kesiştiği noktaları bulunuz.
2. $x^2 + y^2 - 4 = 0$ çemberi ile $y - x + 3 = 0$ doğrusunun kesişip kesişmediğini inceleyin.
3. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$ çemberi ile $y - 6 = 0$ doğrusunun kesiştiği noktayı bulunuz.



ALIŞTIRMALAR 7.2

1. Analitik düzlemde $y-x-m=0$ doğrusu ile standart denklemi $x^2+y^2=1$ olan çemberin ortak noktası bulunmadığına göre m nin değer aralığını bulunuz.

2. Analitik düzlemde $2x+y-m=0$ doğrusu standart denklemi $(x+3)^2+(y-2)^2=4$ olan çemberi iki farklı noktada kestiğine göre m nin değer aralığını bulunuz.

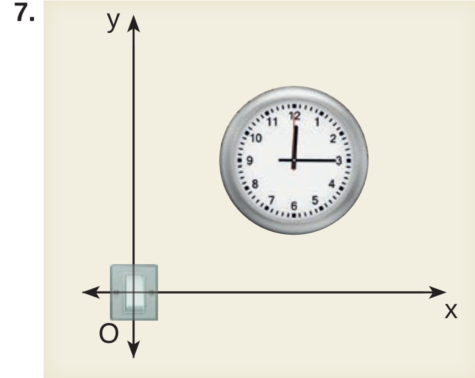
3. Analitik düzlemde $3x-4y-m=0$ doğrusu genel denklemi $x^2+y^2+6x-4y+12=0$ olan çembere teğet olduğuna göre m nin alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

4. Analitik düzlemde standart denklemi $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ olan çember ile denklemi $x-y+1=0$ olan doğru arasındaki <u>en uzak</u> mesafenin kaç birim olduğunu bulunuz.

5. Genel denklemi $x^2+y^2-2x-6y-8=0$ olan çember y eksenini A ve B noktalarında kestiğine göre $|AB|$ nu bulunuz.

6. Genel denklemi $x^2+y^2+6x-8y-7=0$ olan çember x eksenini A ve B noktalarında kestiğine göre $|AB|$ nu bulunuz.

7.



Yukarıdaki şekilde genel denklemi $x^2+y^2-20x-22y+217=0$ olarak modellenen saat duvara sabitlenmiştir.

Ağırlık merkezi orijinde bulunan elektrik anahtarının kısa kenarı 6 birim, uzun kenarı 8 birim ve kenarları eksenlere diktir.

Buna göre elektrik anahtarının duvar saatine <u>en yakın</u> uzaklığını bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 7

1-6. sorularda boş bırakılan yerlere uygun ifadeleri yazınız.

1. Analitik düzlemde sabit bir noktadan .... uzaklıkta bulunan noktaların kümesine çember denir.

2. Analitik düzlemde $A(2, 7)$, $B(8, -1)$ noktalarından geçen ve $[AB]$ nı çap kabul eden çemberin yarıçap uzunluğu .... birim ve merkezi .... noktası olur.

3. $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$ denklemi analitik düzlemde bir .... belirtir.

4. Analitik düzlemin III. bölgesinde eksenlere teğet ve yarıçap uzunluğu $\sqrt{5}$ birim olan çemberin standart denklemi .... olur.

5. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + m - 1 = 0$ denklemi analitik düzlemde bir çember belirtmediğine göre m nin değer aralığı .... olur.

6. Merkezi $M(-1, 3)$ olan, $P(2, -1)$ noktasından geçen çemberin çapının uzunluğu ....birim ve standart denklemi .... olur.

Aşağıdaki soruda genel denklemleri ile verilen çemberlerin yarıçap uzunluğunu bularak eşleştiriniz.

7.

I. $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$	**a)** 1
II. $x^2 + y^2 + 8x + 10y + 25 = 0$	**b)** $\sqrt{2}$
III. $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$	**c)** 2
IV. $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$	**ç)** 3
V. $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$	**d)** 4
	e) 5

8-18. çoktan seçmeli soruları cevaplayınız.

8. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + m + 1 = 0$ **denklemi analitik düzlemde bir çember belirttiğine göre m nin alabileceği en büyük tam sayı değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9. $x^2 + y^2 + 6x - 4y + m + 2 = 0$ **denklemi analitik düzlemde bir nokta belirttiğine göre m kaçtır?**

A) 10 B) 11 C) 13 D) 14 E) 15

10. Merkezi $M(3, 4)$ **olan ve** $P(-1, 1)$ **noktasından geçen çemberin standart denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(x-3)^2+(y+4)^2=5$

B) $(x+3)^2+(y+4)^2=25$

C) $(x-3)^2+(y-4)^2=5$

D) $(x-3)^2+(y-4)^2=25$

E) $(x+3)^2+(y+4)^2=5$

11. Analitik düzlemde orijinden geçen çemberin merkezi $M(-2, 4)$ **olduğuna göre çemberin standart denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(x+2)^2+(y+4)^2=20$

B) $(x+2)^2+(y-4)^2=20$

C) $(x+2)^2+(y-4)^2=2\sqrt{5}$

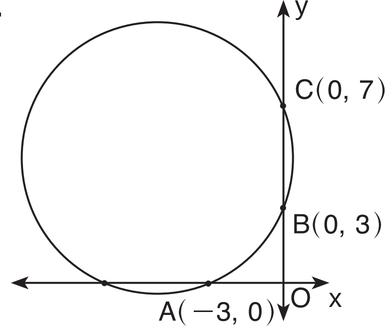
D) $(x-2)^2+(y+4)^2=2\sqrt{5}$

E) $(x+2)^2+(y+4)^2=5$

12. $x^2+y^2+14x-16y-17=0$ **denklemi ile verilen çemberin analitik düzlemde y eksenini kestiği noktalar arasındaki uzaklık kaç birimdir?**

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

13.

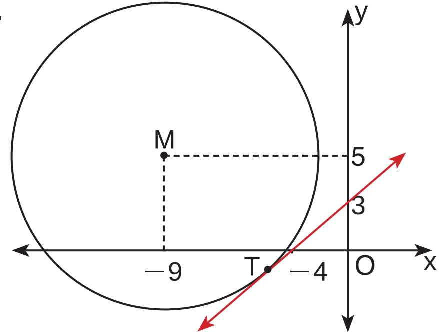


Şekildeki çember, eksenleri $A(-3, 0)$, $B(0, 3)$ ve $C(0, 7)$ noktalarında kesmektedir.

Buna göre çemberin merkezi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-3, 4)$ B) $(-5, 5)$ C) $(-3, 5)$ D) $(-4, -4)$ E) $(-3, 7)$

14.



Yukarıdaki şekilde d doğrusu, T noktasında çembere teğettir.

Merkezi $M(-9, 5)$ **olan çemberin yarıçap uzunluğu kaç birimdir?**

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 2

15. $x^2+y^2+ax+by-ab-36=0$ **çemberinin merkezi** $M(2, -3)$ **olduğuna göre bu çemberin yarıçap uzunluğu kaç birimdir?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) 2 E) 5

16. $4x - 3y - 24 = 0$ **doğrusunun eksenleri kestiği noktaların arasındaki uzaklığı çap kabul eden çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$

B) $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 25$

C) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$

D) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$

E) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 5$

17. Analitik düzlemde $y = mx$ doğrusu, $x^2 + y^2 - 24y + 108 = 0$ çemberini iki farklı noktada kesmektedir.

Buna göre m sayısının alabileceği en büyük negatif tam sayı değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

18. Bir hayırsever, hayvan barınağına çember şeklinde su havuzu yaptırmak istiyor. Bu havuz $x = -3$ ve $x = 5$ doğruları ile $y = 1$ ve $y = 7$ doğrularının arasında kalan bölgeyi içine alacak şekilde en küçük çembersel bölgeye yapılacaktır.

Buna göre bu çemberin standart denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 25$

B) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 25$

C) $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 5$

D) $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 25$

E) $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 15$

19-33. açık uçlu soruları cevaplayınız.

19. Analitik düzlemde $A(-3, 2)$ **ve** $B(1, -1)$ **noktalarından geçen,** $[AB]$ **nı çap kabul eden çemberin standart denklemini bulunuz.**

20. $5x - 12y + 2 = 0$ **doğrusuna teğet ve merkezi** $M(-1, 3)$ **olan çemberin yarıçap uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.**

21. Merkezi $M(2, -3)$ **ve y eksenine teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.**

22. **Merkezi** $M(4, -2)$ **olan ve** $P(-1,10)$ **noktasından geçen çemberin genel denklemini bulunuz.**

23. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ **denklemi ile verilen çemberin analitik düzlemde x eksenini kestiği noktalar arasındaki uzaklığın kaç birim olduğunu bulunuz.**

24. $m \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ **olmak üzere**

$(2m + 1)x^2 + 5y^2 + 10x - 3my + 5 = 0$

denklemi bir çember belirttiğine göre bu çemberin yarıçap uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

25. **Genel denklemi**

$x^2 + y^2 + 12x - 14y + 60 = 0$ **olan çemberin iç bölgesindeki** $P(-6, 4)$ **noktasından geçen <u>en kısa</u> kirişin uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.**

26. **Analitik düzlemde** $y - 14 = 0$ **doğrusu ile** $x^2 + y^2 - 16x - 16y + 28 = 0$ **çemberinin kesiştiği noktaları bulunuz.**

27. **Genel denklemi**

$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ **olan çemberin, denklemi** $y + x - 1 = 0$ **olan doğru ile kesiştiği noktaların ordinatları toplamını bulunuz.**

28. **Analitik düzlemde eksenleri** $A(-6, 0)$, $B(0, 8)$ **ve** $O(0, 0)$ **noktalarında kesen çemberin yarıçap uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.**

29. **Merkezi** $M(9, -7)$ **olan ve** $P(3, 1)$ **noktasından geçen çemberin yarıçap uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.**

30. $3x^2 + ky^2 + (k + 3)x + 12y = 0$ **denklemi bir çember belirttiğine göre bu çemberin yarıçap uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.**

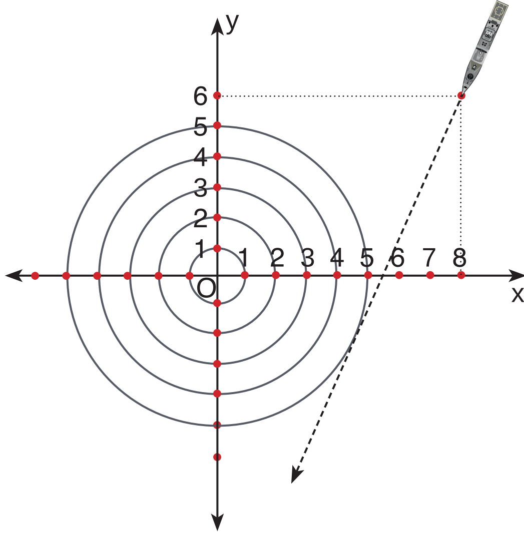
31. **Analitik düzlemde denklemleri**

$(x + 5)^2 + (y - 7)^2 = 25$

$(x - 19)^2 + (y + 3)^2 = 25$

olan iki çember veriliyor. Bu çemberlerin en yakın iki noktası arasındaki uzaklığın kaç birim olduğunu bulunuz.

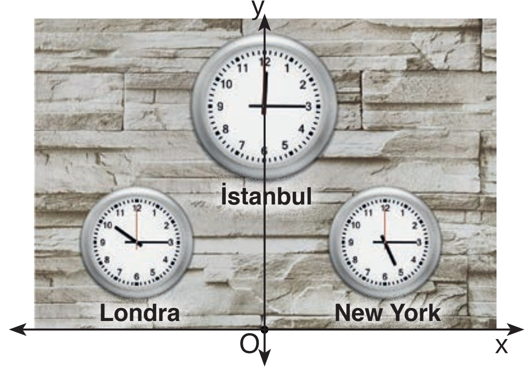
32. Aşağıdaki şekilde bir sahil güvenlik kıyı kontrol kulesindeki radarın anlık ekran görüntüsü verilmiştir.



Fırkateyn radar ekranında bulunduğu $(8, 6)$ noktasından doğrusal ilerleyerek ve 5. halka yayına teğet geçerek yoluna devam etmiştir.

Buna göre fırkateynin radar bölgesinin 5. halkasına teğet olduğu noktaya kadar kaç birim yol aldığını bulunuz.

33.



Yukarıdaki görselde hava limanı duvarına asılı daire şeklinde üç saat analitik düzlem üzerinde modellenmiştir.

- Londra ile New York'taki zamanı gösteren saatlerin büyüklükleri eşittir.
- Londra ile New York'taki zamanı gösteren saatlerin x eksenine olan en kısa uzaklığı 6 birimdir.
- Londra ile New York'taki zamanı gösteren saatler arasındaki en yakın mesafe 14 birim, en uzak mesafe 22 birimdir.
- O noktası orijin olmak üzere İstanbul'daki zamanı gösteren saatin çemberinin denklemi $x^2 + (y - 20)^2 = 9$ dur.

Buna göre

a) Londra'daki zamanı gösteren saati çevreleyen <u>en büyük</u> çemberin denklemini bulunuz.

b) İstanbul ile New York'taki zamanı gösteren saatler arasındaki <u>en uzak</u> mesafeyi bulunuz.

Daha fazla soruya ulaşmak için karekodu okutunuz



A

anlık hız	:	Bir hareketlinin belli bir zamandaki hızı.
aralık	:	Gerçek sayılar kümesinin farklı iki elemanı ile sınırlandırılmış alt kümesi.
aritmetik dizi	:	Ardışık terimleri arasındaki farkı sabit olan dizi.
artan fonksiyon	:	Bir fonksiyonda bağımsız değişken artarken bağımlı değişkenin de artması.
azalan fonksiyon	:	Bir fonksiyonda bağımsız değişken artarken bağımlı değişkenin azalması.

B

belirli integral	:	Alt ve üst sınırları olan integral.
belirsiz integral	:	Bir f fonksiyonu için türevi f ye eşit olan fonksiyonların hepsi.
bir noktada limit	:	Bir fonksiyondaki değişkenin yaklaştığı bir değere karşılık fonksiyonun yaklaştığı değer.

D

dizi	:	Öğeleri sayılabilir bir kümeyle oluşturulmuş küme.
doğal logaritma	:	e tabanına göre logaritma.
dönme	:	Bir cismin her noktasının bir çember ya da kapalı bir eğri çizecek biçimde devinmesi.
dönme açısı	:	Dönme dönüşümü esnasında oluşan açı.
dönme merkezi	:	Dönme dönüşümü esnasında konumu değişmeyen nokta.
dönüm (büküm. noktası	:	Bir fonksiyonun grafiğinde çukurluk yönünün yön değiştirdiği ve sürekli olduğu nokta.
dönüşüm	:	Belirli yapı ve özellikler dizisinin başka bir yapı ve özellikler dizisine dönüşmesi.

E

ekstremum değer	:	Fonksiyonun en büyük veya en küçük değerlerinden her biri.
ekstremum nokta	:	Fonksiyonun en büyük veya en küçük değerlerini aldığı nokta.

F

Fibonacci dizisi	:	Elemanları Fibonacci sayıları olan bir dizi.

G

geometrik dizi	:	Her terimi bir öncekinin sabit bir değeriyle çarpımından oluşan dizi.

İ

integral sabiti	:	İntegral bulunduktan sonra fonksiyona eklenen sabit sayı.
ilkel fonksiyon	:	Türevi bilinen bir fonksiyonun aslı.
integral	:	Türevi bilinen bir fonksiyonu (fonksiyonun ilkelini) bulma işlemi.

L

limit : Değişken bir niceliğin istenilene çok yakın olarak yaklaştığı bir başka nicelik.

logaritmik denklem : Bilinmeyenin logaritmasını içeren denklem.

M

maksimum değer : Sürekli bir fonksiyonun bir aralıkta aldığı en büyük değer.

minimum değer : Sürekli bir fonksiyonun bir aralıkta aldığı en küçük değer.

minimum nokta : Sürekli bir fonksiyonun bir aralıkta aldığı en büyük değerin bulunduğu nokta.

mutlak maksimum : Sürekli bir fonksiyonun bir aralıkta aldığı değerlerin en büyüğü.

Ö

öteleme : Bir uzayı ya da uzay içindeki nesneyi aynı doğrultuda bir yerden başka yere götürme işlemi.

P

parametrik denklem : Doğru üzerindeki noktaların bileşenlerinin bir parametreye bağlı olarak ifadesi.

S

sabit dizi : c gerçek sayı olmak üzere her n pozitif tam sayısı için $(a_n) = c$ koşulunu sağlayan dizi.

sağdan limit : Verilen bir f fonksiyonu için bir noktadaki sağından yaklaşımla bulunan limit.

sağdan türev : Bir noktanın sağından yaklaşımla elde edilen türevi.

soldan limit : Verilen bir f fonksiyonu için bir noktadaki solundan yaklaşımla bulunan limit.

soldan türev : Bir noktanın solundan yaklaşımla elde edilen türevi.

süreklilik : Bir fonksiyonun $x = 0$ noktasındaki limiti ile o noktadaki görüntüsünün eşit olması.

T

ters türev : İntegral alma işlemi.

trigonometrik denklem : Bilinmeyeni trigonometrik fonksiyonların değişkeni olarak içeren denklem.

türev : Değişken artması sıfıra giderken işlevin artmasının değişken artmasına oranının değeri.

türevlenebilir fonksiyon : Tanım kümesindeki her (a, b) nin her noktasında türevi tanımlı olan bir fonksiyon.

U

uzay : Tüm noktaların oluşturduğu küme.

Ü

üstel denklem : Belirsiz değişkeni kuvvet şeklinde içeren denklem.

üstel fonksiyon : İçinde üstel bir ifade bulunan ve bu ifadenin üstü veya hem üstü hem tabanı değişken olan bir fonksiyon.

Y

yerel ekstremum : Bir fonksiyonun sürekli olduğu belli aralıktaki en büyük veya en küçük değeri.

CEVAP ANAHTARI

Cevap anahtarına ulaşmak için karekodu okutunuz.



Alexander, G. M. (2011). *Elementary Geometry For College Students*. Belmond: Brooks/cole.
Balcı, M. (2016). *Genel Matematik I*. Ankara: Palme Yayıncılık.
Bayrakdar, M. (2012). *İslâm Bilim Adamları*. İstanbul: İnkılâb Yayınları.
Blitz, R. (2014). *College Algebra: Essentials*. Boston: Pearson Education.
Burton, D. M. (2011). *The History of Mathematics*. New York: The McGraw-Hill Companies.
Young, C. Y. (2013). *Algebra and Trigonometry*. Florida: Wiley Plus.
Cajorı, F. (2014). *Matematik Tarihi*. Ankara: ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayıncılık ve İletişim A. Ş.
Çelik, E. (2016). *Dünyayı Değiştiren Müslüman ve Türk Bilim Adamları*. Ankara: Tutku Yayınevi.
Demirtaş, A. (1986). *Ansiklopedik Matematik Sözlüğü*. Ankara: Bilim Teknik Kültür Yayınları.
James, I. (2013). *Büyük Matematikçiler Euler'den Von Neumann'a*. İstanbul: Türkiye İş Bankası Kültür Yayınları.
Larson, R. (2014). *Precalculus With Limits*. Boston: Brooks/Cole.
Milli Eğitim Bakanlığı. (2018). *Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı*. Ankara: Milli Eğitim Yayınları.
Stewart, L. R. (2016). *Precalculus Mathematics For Calculus*. Boston: Cengage Learning.
Struik, D. J. (2011). *Kısa Matematik Tarihi*. İstanbul: Doruk Yayımcılık.
Sullivan, M. (2012). *Precalculus*. Boston: Pearson Educatiaon.
Swokowskıs, J. A. (2010). *Algebra and Trigonometry With Analytic Geometry*. Belmont: Brooks/Cole.
Thomas, M. D. (2013). *Thomas Kalkülüs Cilt 1*. İstanbul: Pearson Eğitim Çözümleri Tic. Ltd. Şti.
Türk Dil Kurumu. (2012). *Yazım Kılavuzu*. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
Wright, D. G. (2015). *Matematik, Cilt 1*. Ankara: Nobel Yayıncılık.
Wright, D. W. (2015). *Calculus Cİlt1*. Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

(Kaynakça APA 6 stiline göre düzenlenmiştir.)

GÖRSEL VE GENEL AĞ KAYNAKÇASI

Görsel kaynakçası, genel ağ kaynakçası ve e içerik kaynakçasına ulaşmak için karekodu okutunuz.

